И. Б. АБЕЛЬСОН

МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ОНТИ
1935

И. Б. АБЕЛЬСОН

МАКСИМУМ И МИНИМУМ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
ПРОФ. Л. А. ЛЮСТЕРНИК

ОНТИ — ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОЙ И ЮНОШЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА — 1935 — ЛЕНИНГРАД

П А М Я Т И

Л У Ч Ш Е Г О Д Р У Г А Ю Н О С Т И

С А М У И Л А Б О Т Е К

участника мировой войны,
добровольца Красной армии,
погибшего летом 1919 г. близ
г. Феодосии от зверской расправы
белых.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Настоящая книга предназначена для любителлй математики, имеющих знания приблизительно в объеме 9 классов средней школы. Она является одной из тех книг, которые должны заполнить существующий у нас разрыв между литературой по элементарной матеметике и так называемой высшей математике. На конкретном и доступном материале она подводит читателя вплотную к идеям математического анализа. Это соответствует и историческому ходу, так как задачи на максимум-минимум были одними из тех, которые привели к созданию дифференциального исчисления. Книга может быть использована для работы в школьных математических кружках. Выражаем убеждение, что предлагаемая книга принесет пользу молодежи, интересующейся математикой.

Проф. Л. А. Люстерник

ГЛАВА I

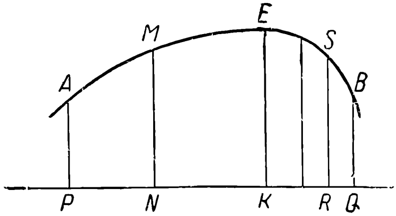
ПРИМЕРЫ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

Введение

Максимум и минимум — слова латинские и в переводе означают: наибольшее и наименьшее (maximum и minimum).

В математике эти слова весьма употребительны, но смысл, который им придается, несколько отличается от обычного. Легче всего уяснить этот смысл на примерах.

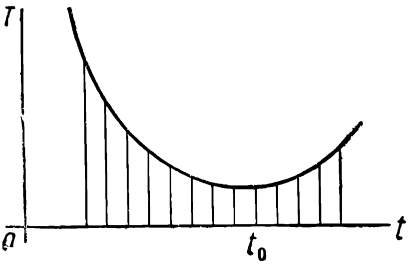
Пример. Представим себе, что путешественник, переходя через гору, прошел путь, который мы условно изобразим на чертеже линией AB (черт. 1). Будем измерять высоту подъема так, как ее обычно измеряют — от уровня моря. На чертеже уровень моря изображен прямой PQ, и если путешественник находится в точке M, то высота подъема будет представлена отрезком NM.



Черт. 1.

По мере продвижения путешественника его высота над уровнем моря изменяется (т. е. является переменной величиной); пока он поднимается, эта высота увеличивается; когда он достигнет вершины — точки E — высота сделается наибольшей, а затем, при дальнейшем продвижении путешественника вниз по склону горы, высота путешественника над уровнем моря будет уменьшаться. Из чертежа видно, что вертикальный отрезок KE, измеряющий эту высоту в точке E, будет больше, чем любой вертикальный отрезок $NИ$, лежащий левее KE. Когда же путешественник перейдет вершину и будет находиться правее точки E, то соответствующие вертикальные отрезки (например RS) также будут меньше, чем KE. Отсюда видно, что из всех вертикальных отрезков, измеряющих высоту путешественника в различные моменты его пути, отрезок KE является наибольшим. Такое наибольшее значение переменной величины (в данном случае высоты над уровнем моря) называется максимальным.

Дадим теперь пример, в котором переменная величина принимает наименьшее или, как говорят, минимальное значение.



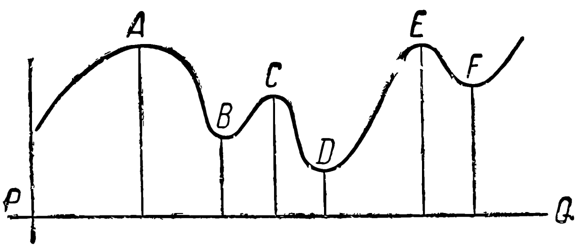
Черт. 2.

Пример. В течение летней ночи каждые 10 мин. измеряют температуру воздуха и результаты отмечают на графике. Если по горизонтальной оси (черт. 2) откладывать время, а по вертикальной — температуру, то получим ряд вертикальных отрезков (их называют ординатами). Отыскав на графике наименьшую из ординат и соответствующую ей точку t_0 на горизонтальной оси Ot, тем самым определяем момент наиболее низкой температуры. Такое значение величины (температуры) называют минимальным; слева и справа от точки t_0 ординаты больше, чем ордината для этой точки.

Общее для обоих примеров заключается в том, что переменная величина (высота, температура) в своем изменении доходит до крайнего значения — в сторону возрастания или убывания, — чтобы затем начать изменение в обратном направлении. Поэтому вопросы максимума и минимума изучают параллельно. Оба эти понятия объединяют в одно понятие — крайнего или экстремального значения (от латинского слова extremum — крайнее). Мы увидим, что задачи на максимум и задачи на минимум решаются совершенно одинаковым образом.

Иногда переменная величина может поочередно возрастать и убывать, принимая при этом ряд наибольших и наименьших значений. Так, например, рассматривая изменение синуса, мы видим, что при возрастании угла x $\sin x$ растет от 0 до 1 (своего максимума), затем начинает убывать и для $x = {}^3/_2\,\pi$ (270°) достигает наименьшего из возможных значений (-1); при дальнейшем увеличении x синус x опять возрастает и т. д.

Вообще при попеременном возрастании и убывании может оказаться даже, что какой-нибудь из минимумов больше какого-нибудь максимума. Это можно видеть из прилагаемого чертежа (черт. 3), где изображен



Черт. 3.

путь $ABCDEF$ через несколько горных перевалов. Высота путешественника над уровнем моря будет иметь максимум в точках A, C, E и минимум в точках B, D, F. В точке C имеем максимум, так как ордината этой точки больше соседних слева и справа; в точке F имеем минимум, так как ординаты слева и справа больше ординаты точки F. Вместе с тем „минимальная" ордината в точке F оказалась больше „максимальной" в точке C.

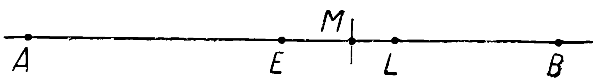
Пример: в январский день максимальная температура (в течение дня) меньше, чем минимальная температура в июльский день.

Таким образом, с понятием максимума (или минимума) мы будем связывать не наибольшее (или наименьшее) из *всех вообще* значений, принимаемых изменяющейся величиной, а такие значения, которые больше (или меньше) соседних *близлежащих* как слева, так и справа[1].

Настоящая книга имеет целью показать читателю, как решаются задачи, связанные с нахождением максимума или минимума какой-нибудь переменной величины. Однако прежде всего надо показать, как ставятся подобные задачи; для этого мы приведем здесь два образца (решение этих задач будет дано позднее).

Задача. Площадка (черт. 4) освещена двумя сильными источниками света (в точке A источник силой в 8 000 свечей, в точке B — 1 000 свечей.) Расстояние между точками A и B равно l. Найти место, где сила освещения от обоих источников вместе была бы наименьшей.

Надо принять во внимание, что интенсивность осве-



Черт. 4.

щения обратно пропорциональна квадрату расстояния, и прямо пропорциональна силе источника.

Очевидно, искомое место не лежит точно посредине между A и B, так как слева освещение будет гораздо больше, чем справа (в 8 раз), поэтому естественно передвинуться от середины E вправо. Такое перемещение от точки E вправо сначала, безусловно, имеет смысл, так как ослабление освещения от левого источника будет больше, чем усиление от правого. Но постепенно, по мере перемещения вправо, воздействие левого источника ослабевает, а правого возрастает. Поэтому перемещение целесообразно только до определенной точки. Найти эту точку, это и значит решить задачу.

Решение этой задачи читатель найдет в последней главе (глава IV, задача 1). Оказывается, что искомая точка L должна быть выбрана так, чтобы $AL:BL = 2:1$.

---

[1] В настоящей книге будут рассматриваться задачи, в которых встречается или только один максимум или только один минимум.

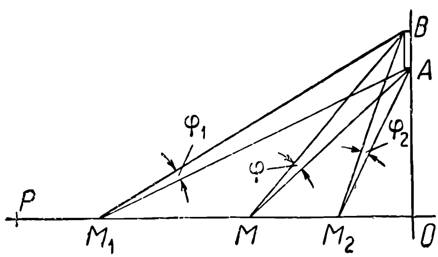
Задача. На высокой стене висит плакат (черт. 5). Известно расстояние от точки O до нижнего и до верхнего краев плаката:

$$OA = a \text{ метров } (40 \text{ м}),$$

$$OB = b \text{ метров } (48 \text{ м}).$$

Аппарат фотографа должен находиться на горизонтальной линии OP. Спрашивается, на каком расстоянии $OM = x$ поместить аппарат, чтобы плакат был виден из аппарата под наибольшим углом, т. е. чтобы угол $AMB = \varphi$ был наибольшим? (В этом случае плакат будет снят наиболее отчетливо).

Отодвигая или придвигая аппарат по линии OP, мы этим самым изменяем углы AMO и BMO; при этом будет изменяться и их разность, т. е. рассматриваемый угол φ. Таким образом, угол φ зависит от расстояния x, или, как говорят, является ф у н к ц и е й от а р г у м е н т а x. Очевидно, если фотограф станет на весьма большом расстоянии от стены (напр. $x = 300$ *м*), то угол φ будет очень малым. По мере приближения к стене (например, беря $x = 280$ *м*, $x = 260$ *м*, $x = 240$ *м* и т. д.) угол φ будет возрастать. Стремясь увеличить угол φ, фотограф будет подходить к стене все ближе и ближе. Но такое приближение к стене (т. е. уменьшение x) ему выгодно только до известного предела. Потому что, если он встанет очень близко к стене, то угол φ опять станет малым (он будет „скошенным“.) Задача заключается в том, чтобы найти то расстояние x, на котором фотограф должен остановиться, т. е. найти ту точку на прямой OP, для которой угол φ будет наибольшим (перемещение от этой точки ближе к стене и отступление назад одинаково нецелесообразно). Решение этой задачи читатель найдет ниже в этой главе (см. задачу 6), она же будет решена в главе II (задача 15),



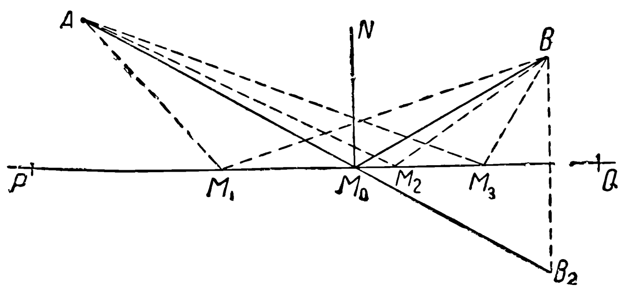
Черт. 5.

в главе III (задача 7) и в главе IV (задача 9) и притом каждый раз новым способом.[1]

Из приведенных задач видно, что мы будем иметь дело с непрерывно изменяющимися переменными величинами (угол зрения φ в этой задаче и освещенность в предыдущей), зависящими от других переменных (например, от расстояния x). И во всем процессе изменения переменных требуется отметить тот момент, когда значение этих зависимых переменных становится наибольшим или наименьшим.

2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНО

Перейдем теперь к решению некоторых простейших задач, не требующих особых теоретических приемов.



Черт. 6.

Задача 1. На плоскости дана прямая PQ и две точки A и B, не лежащие на ней и расположенные по одну сторону от этой прямой (черт. 6). Требуется найти на прямой PQ такую точку M, чтобы длина ломаной AMB была возможно меньшей (минимальной).

Решение. Допустим, что задача решена, т. е. найдена на прямой PQ такая точка (обозначим ее через M_0), что ломаная AM_0B короче всякой другой ломаной AM_1B, AM_2B, AM_3B и т. д. Построим точку B_2, симметричную точке B относительно прямой PQ, т. е. расположенную

[1] Это делается с той целью, чтобы читатель мог проследить, как можно различными приемами, различными методами, резрешить одну и ту же задачу, и чтобы он мог видеть своеобразие каждого метода.

по другую сторону от прямой PQ на расстоянии, равном расстоянию точки B от прямой PQ. Тогда $M_0B_2 = M_0B$, $M_1B_2 = M_1B$ и т. д. Поэтому также

$$AM_0 + M_0B = AM_0 + M_0B_2,$$
$$AM_1 + M_1B = AM_1 + M_1B_2$$

и т. д.

Но если ломаная AM_0B есть кратчайшая из всех этих ломаных, то линия AM_0B_2 должна обладать тем же свойством, т. е. быть короче всех этих линий: AM_1B_2, AM_2B_2 и т. д. С другой стороны, кратчайшее расстояние между точками A и B_2 дается прямой линией AB_2, их соединяющей. Поэтому линия AM_0B_2 должна совпасть с прямой AB_2.

Отсюда мы получаем способ решения задачи: точку M_0 находят как пересечение прямой AB_2 с прямой PQ.

Покажем применение этой задачи в физике.

Пусть плоскость PQ представляет собой зеркало. Луч света, исходящий из точки A, должен попасть в точку B (послать „зайчик“ в точку B), предварительно отразившись от плоскости зеркала PQ. Если потребовать, чтобы на этот переход из точки A в точку B ушло минимум времени, то и путь должен быть кратчайшим. Имеем из чертежа

$$\angle AM_0P = \angle B_2M_0Q = \angle BM_0Q,$$

т. е. углы, образованные прямыми AM_0 и BM_0 с прямой PQ, равны. Нетрудно видеть, что и дополнительные углы AM_0N и NM_0B также равны. Мы видим, что наше требование влечет за собой равенство углов:

$$\angle AM_0N = \angle NM_0B,$$

т. е. угол падения должен быть равен углу отражения. Таким образом закон отражения в физике дает наиболее экономный (в смысле времени) путь пробега луча света.

Задача 2. Число a надо разбить на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим (из возможных).

Решение. Пусть, например, $a = 40$. Обозначим одно из слагаемых через x, другое через y; тогда $x + y = 40$. Можно взять, например, следующие пары чисел:

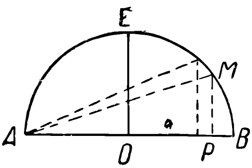
$$x = 10, \quad x = 11, \quad x = 12,$$
$$y = 30, \quad y = 29, \quad y = 28$$

и т. д.

Соответствующие произведения будут: 300; 319; 336 и т. д. Каким образом из всех подобных пар (можно брать и дробные значения x и y) выбрать такую, для которой произведение будет наибольшим?

Решение. Мы дадим здесь следующее наглядное (геометрическое) решение (черт. 7). Строим полукруг с диаметром $AB = a$. Пусть M—произвольная точка полуокружности, и MP — перпендикуляр из нее на диаметр. Обозначим AP через x; PB — через y; тогда $x + y = a$.

На основании известной теоремы о квадрате высоты, опущенной из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике, имеем: $PM^2 = AP \cdot BP$; или $x \cdot y = h^2$ (если обозначить MP через h), Изменяя значение x, мы перемещаем точку P, но указанное равенство остается неизменным. Произведение $x \cdot y$ будет наибольшим, если правая часть (h^2) примет наибольшее значение; а это будет тогда, когда MP совпадет с EO; но тогда $AO = OB$; $x = y$. Максимум произведения получается при равенстве обоих слагаемых. В численном примере $a = 40$ надо взять $x = y = 20$. Читатель может легко проверить, что эта пара чисел: $x = 20$, $y = 20$ дает в произведении больше, чем всякая другая пара.



Черт. 7.

К этой задаче мы еще в дальнейшем вернемся.

Задача 3. Дан трехчлен второй степени вида: $x^2 + px + q$ (например, $x^2 - 6x + 21$). Найти наименьшее значение трехчлена.

Решение. Поясним сперва смысл вопроса. Обозначим трехчлен $x^2 - 6x + 21$ через y, т. е. $x^2 - 6x + 21 = y$. Если переменному x будем давать ряд значений, например $x = 4, x = 5, x = 6\ldots$ то каждому такому значению x соответствует некоторое значение y; в данном случае $y = 13, y = 16, y = 21\ldots$ и т. д. Можно было бы построить большую таблицу соответствующих значений x и y и из рассмотрения ее выяснить приблизительно[1], при каком значении x трехчлен $y = x^2 - 6x + 21$ получает наименьшее

[1] Приблизительно, так как между двумя соседними значениями x можно вставить сколь угодно большое число промежуточных его значений.

значение. Но этот путь непосредственных испытаний весьма длинный. Желательно найти способ, прямо ведущий к цели.

Мы поступим следующим образом. Выражение x^2-6x дополним до квадрата двучлена:

$$x^2-6x=(x^2-6x+9)-9=(x-3)^2-9.$$

Тогда заданный трехчлен можно преобразовать так:

$$y=x^2-6x+21=(x-3)^2-9+21=(x-3)^2+12.$$

В полученном выражении $y=(x-3)^2+12$ первое слагаемое переменное (зависит от значения x), второе — постоянное. Чтобы значение y было минимальным, надо сделать первое слагаемое возможно меньшим. Теперь нетрудно видеть, что из всевозможных значений x особую роль играет значение $x=3$; оно обращает первое слагаемое $(x-3)^2$ в нуль. Всякое другое значение $x \neq 3$, будет ли оно больше 3 или меньше 3, сделает слагаемое $(x-3)^2$ числом положительным, и тогда y будет больше 12. Поэтому минимальное значение трехчлена будет:

$$y_{\min}=12,$$

и достигается оно при значении $x=3$.

Читатель по этому образцу без труда решит всякую подобную задачу. Например:
$y=x^2-8x-10$; минимум получается при $x=4$; $y_{\min}=-26$.
$y=x^2+6x-10$; минимум получается при $x=-3$; $y_{\min}=-19$.

Рассмотрим еще случай, когда коэфициент при x^2 равен -1. т. е. трехчлен вида $-x^2+6x+19=y$. Пусть для него требуется найти наибольшее значение. Решение такое же. Имеем:

$$y=-(x^2-6x)+19.$$

Преобразуем двучлен x^2-6x:

$$x^2-6x=(x^2-6x+9)-9=(x-3)^2-9.$$

Теперь заданный трехчлен можно представить так:

$$y=-(x-3)^2+9+19=-(x-3)^2+28.$$

Второе слагаемое постоянно, первое зависит от значения x. Если x не равно 3, то $(x-3)^2$ равно положительному числу, а тогда y будет меньше, чем 28. Если же $x=3$, то y равно 28. Поэтому наибольшее из возможных значений трехчлена будет:

$$y_{\max}=28$$

и достигается оно при значении $x=3$.

Многие задачи приводятся к нахождению максимума или минимума трехчлена:

$$y=\pm x^2+px+q.$$

Теперь мы получили прием, позволяющий их решать. Применим этот прием к решению двух задач, из которых одна уже решена нами другим путем.

Задача 4 (совпадает с задачей 2; сравните решения).

Число a надо разбить на два слагаемых так, чтобы произведение их было возможно большим.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x; тогда второе равно $a-x$. Произведение их будет $x(a-x)$. Требуется найти максимум для $x(a-x)=ax-x^2$. Поступаем согласно указаниям предыдущей задачи. Имеем:

$$y=-x^2+ax=-(x^2-ax).$$

Выражение x^2-ax дополняем до квадрата двучлена:

$$x^2-ax=x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4},$$

Заданный трехчлен можно будет представить так:

$$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

Максимум для y найдем, если принять $x=\frac{a}{2}$. Тогда:

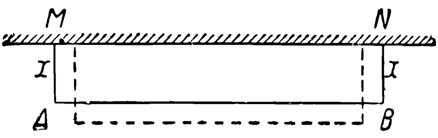
$$y_{\max}=\frac{a^2}{4}.$$

Но в этом случае оба слагаемые равны: $x=a-x=\frac{a}{2}$.

Задача 5. У каменной стены надо пристроить ограду в форме прямоугольника (черт. 8). Длина ограды $MABN$

дана заранее (равна l). Какие размеры придать ограде, чтобы площадь, ею ограниченная, была возможно большей (максимальной)?

Решение. Обозначим ширину площадки через x, $MA = x$. Тогда длина ее должна быть равна $l - 2x$. Площадь выразится произведением: $x(l-2x) = lx - 2x^2$; обоначим его через y. Итак, надо найти максимум трехчлена второй степени:



Черт. :

$$y = -2x^2 + lx.$$

Решаем по вышеуказанному.

$$y = -2x^2 + lx = -2\left(x^2 - \frac{l}{2}x\right).$$

Далее

$$x^2 - \frac{l}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}lx + \left(\frac{1}{4}l\right)^2 - \left(\frac{1}{4}l\right)^2 =$$

$$= \left(x - \frac{1}{4}l\right)^2 - \frac{l^2}{16}.$$

Поэтому

$$y = -2\left(x - \frac{1}{4}l\right)^2 + \frac{1}{8}l^2.$$

Максимум для y получим, приняв $x = \frac{1}{4}l$. Тогда.

$$y_{\max} = \frac{1}{8}l^2.$$

Теперь искомая форма прямоугольника определена:

$$AM = BN = \frac{1}{4}l; \qquad AB = \frac{1}{2}l.$$

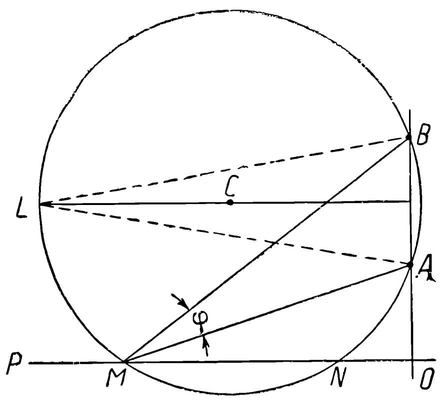
Длина площадки должна быть вдвое больше ширины.

Решим теперь задачу, которая была приведена выше (см. стр. 9).

Задача 6. На высокой стене висит плакат. Известно расстояние от точки O до нижнего и до верхнего краев плаката (черт. 9).

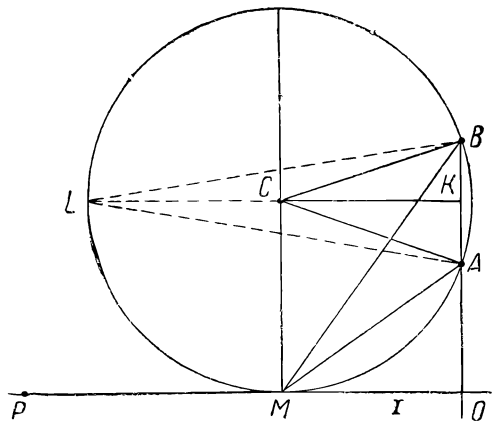
$$OA = a \text{ (например 40 } м\text{)},$$
$$OB = b \text{ (например 48 } м\text{)}.$$

Аппарат фотографа должен находиться на горизонтальной линии OP. Спрашивается, на каком расстоянии $OM = x$ его поместить, чтобы плакат был виден из аппарата под наибольшим углом, т. е. чтобы угол $AMB = \varphi$ был наибольшим?



Черт. 9.

Решение. Мы дадим следующее изящное геометрическое решение задачи. Пусть глаз наблюдателя находится в точке M (черт. 9). Проведем окружность через точки M, A, B. Далее, через середину отрезка AB проведем горизонтальную прямую, параллельную OP, до встречи с окружностью в точке L. Очевидно, угол $AMB = \varphi$, под которым виден плакат, равен углу ALB. При перемещении точки M окружность, неизменно проходящая через точки A и B, будет изменять свои размеры и положение на плоскости. Отыскать положение, дающее максимум угла φ, все равно, что отыскать максимум угла ALB; а этот угол будет тем больше, чем ближе точка L к вертикальной прямой OAB (заметим кстати, что такова же величина угла, под которым плакат виден из точки N). В пучке окружностей, проходящих через точки A и B, будем уменьшать радиус. Точки M и L будут при этом придвигаться к прямой AB, а точка N будет отодвигаться от этой прямой; угол ALB будет расти. Так как окружность должна непременно иметь общую точку с прямой OP, то процесс уменьшения радиуса можно вести лишь до того момента, когда точка M (с которой сольется точка N) окажется точкой касания окружности и прямой OP. Но в этом случае надо от черт. 9 перейти к черт. 10. Теперь искомое расстояние $x=OM=$ $=CK$ нетрудно определить из прямоугольного треугольника CKA. Имеем: $CA=$ $=CM=\frac{a+b}{2}$; катет $KA=\frac{b-a}{2}$; другой катет $CK=$ $=\sqrt{CA^2-KA^2}=$ $=\sqrt{ab}$.



Черт. 10.

Все вышеприведенные задачи были решены частными приемами, т. е. такими, которые были приспособлены к каждой задаче в отдельности. В дальнейших главах мы познакомимся с более общими приемами для решения подобных задач [1].

3. О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

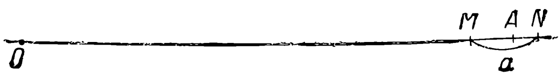
Относительная погрешность

Если на вопрос: „Каково расстояние от Москвы до Ленинграда?“ кто-нибудь ответит: 650 *км* 421 *м* 43 *см*, то такой ответ всем покажется странным и ненужным. В самом деле, к чему точная цифра метров и сантиметров? Ведь самые границы городов не определены настолько точно. Кроме того, какой практический интерес может иметь такая точность? Важно знать, будет ли 650 или 651 *км*, а эти сантиметры, составляющие приблизительно

[1] Все излагаемое ниже (до конца главы I) является лишь подготовительным материалом к главе II.

одну миллионную часть всего расстояния, можно отбросить. При определении расстояния от Земли до Солнца размерами земного шара можно пренебречь. Если столяр делает оконную раму, то вопрос о нескольких миллиметрах для него не играет роли; иное дело—1 *мм* при обработке деталей какого-нибудь точного механизма. Эти примеры показывают, что при всяких измерениях допускается некоторая погрешность, причем имеет значение именно отношение допускаемой погрешности ко всей величине.

Если требуется измерить стержень OA (черт. 11), то мы не можем выполнить измерение абсолютно точно; достаточно установить такие два заранее известных по



Черт. 11.

длине отрезка OM и ON, между которыми заключается длина стержня OA. Если за длину стержня принять OM, то AM будет абсолютной погрешностью; если взять длину ON, то AN будет абсолютной погрешностью. Дробь $\frac{AM}{OA}$ или $\frac{AN}{OA}$ называется относительной погрешностью; эти дроби заменяют близкими к ним дробями $\frac{AM}{OM}$ или $\frac{AN}{ON}$. При таком измерении мы допускаем (абсолютную) погрешность, не большую, чем MN; отношение $\frac{MN}{OM}$ или $\frac{MN}{ON}$ называется допущенной относительной погрешностью.

Введем обозначения $OA = x$; $OM = l$; $ON = l + \alpha$; тогда:

$$l < x < l + \alpha.$$

Абсолютная погрешность: $x - l$ или $l + \alpha - x$.
Допущенная погрешность: α.
Относительная погрешность:

$$\frac{x-l}{x} \approx \frac{x-l}{l},$$

или

$$\frac{l+\alpha-x}{x} \approx \frac{l+\alpha-x}{l+\alpha}$$

(знак $\approx$ означает приблизительное равенство).

Распределение величин по разрядам

Проще всего можно измерять величины, установив разряды единиц так, чтобы отношение единицы следующего разряда к единице предыдущего было постоянным, т. е. так, как построена метрическая система мер; в ней это постоянное отношение единиц двух соседних разрядов равно $\frac{1}{10}$. Удобство такого способа измерения в том, что он позволяет быстро выяснять, какая из двух величин больше. Например, если даны два числа:

$$0{,}21489 \text{ и } 0{,}21512,$$

то сразу видно, что второе число больше, так как оно имеет 5 единиц третьего разряда, а первое только четыре, и таким образом, сколько бы мы ни приписывали десятичных знаков к первому числу, все равно оно не превзойдет второго числа. Последнее объясняется свойством убывающей геометрической прогрессии. В общем случае, если дано выражение:

$$A+B\alpha+C\alpha^2+D\alpha^3+E\alpha^4+\ldots,$$

расположенное по степеням дробного числа α (например $\alpha=\frac{1}{1\,000}$, а коэфициенты $A, B, C, D, E,\ldots$ меньше 1 000), то сумма членов ряда, начиная с некоторого места, не даст даже одной единицы предыдущего разряда, т. е.

$$C\alpha^2+D\alpha^3+E\alpha^4+\ldots<\alpha,$$
$$D\alpha^3+E\alpha^4+\ldots<\alpha^2$$

и т. д.

Установление разрядов, т. е. знаменателя геометрической прогрессии—вещь условная. Можно взять:

$$\alpha=\frac{1}{10}; \quad \alpha=\frac{1}{12}; \quad \alpha=\frac{1}{100}; \quad \alpha=\frac{1}{1\,000}$$

и т. д. Чем меньше α, тем быстрее будут убывать последующие слагаемые.

Построим систему единиц веса, у которой знаменатель $\alpha = \frac{1}{1\,000}$. За основную единицу мы выберем 1 *т* (тонна) и в этих единицах будем выражать результаты взвешивания. $\frac{1}{1\,000}$ *т* равна 1 *кг*; $\frac{1}{1\,000}$ *кг* будет 1 *г*; $\frac{1}{1\,000}$ *г* равна 1 *мг*. Пусть на металлургическом заводе поступающая руда взвешивается на больших весах гирями, весом каждая в 1 *т*. Из нее выбирают куски для пробы; их взвешивают на вторых весах с гирями в 1 *кг*. Затем берут мелкие кусочки для механического анализа, и эти кусочки взвешивают на третьих весах, где каждая гиря—1 *г*. И, наконец, весьма мелкие массы вещества, идущие на химический анализ, взвешивают на точных химических весах с гирями в 1 *мг*. Вес некоторого количества руды, взвешенного на всех четырех весах, может быть записан, например, так:

$$7\,т\ \ 15\,кг\ \ 80\,г\ \ 30\,мг,$$

или, короче, $7\,\overset{\frown}{15}\overset{\frown}{80}\overset{\frown}{30}\,т$, что означает:

$$\left[7 + 15 \cdot \frac{1}{1\,000} + 80 \cdot \left(\frac{1}{1\,000}\right)^2 + 30 \cdot \left(\frac{1}{1\,000}\right)^3\right] т$$

или

$$7 + 15\alpha + 80\alpha^2 + 30\alpha^3.$$

В общем случае получается величина вида:

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3.$$

Если теперь даны два количества:

$$A_1 + B_1\alpha + C_1\alpha^2 + D_1\alpha^3$$

и

$$A_2 + B_2\alpha + C_2\alpha^2 + D_2\alpha^3,$$

и спрашивается, какое из них больше, то, конечно, мы прежде всего обратим внимание на основные единицы —тонны. Если $A_1 > A_2$, то сразу заключаем, что первое количество больше. Если $A_1 = A_2$, то внимание переключается на коэфициенты B_1 и B_2; при этом, если $B_1 > B_2$, то заключаем, что первое количество больше второго, не обращая внимания на последующие коэфициенты C и D.

Если $A_1 = A_2$ и $B_1 = B_2$, то будем сравнивать коэфициенты C_1 и C_2 и т. д.

Надо отметить, однако, следующее исключение. Может случиться, что $A_1 = A_2$; $B_1 > B_2$ и все же второе количество больше первого. Это будет в том случае, когда коэфициент C_2 весьма велик; (в нашем примере в том случае, если он равен нескольким тысячам). В этом случае $C_2\alpha^2$ составит несколько единиц старшего разряда (например, несколько тысяч граммов составят несколько килограммов); тогда $B_2\alpha + C_2\alpha^2$ может оказаться больше, чем $B_1\alpha$. Но мы таких случаев касаться не будем.

Эквивалентность

Пусть даны две величины:

$$M_1 = A + B\alpha + C_1\alpha^2 + D_1\alpha$$

и

$$M_2 = A + B\alpha + C_2\alpha^2 + D_2\alpha^3.$$

Если пользоваться только весами первыми и вторыми, то эти два количества как бы равны между собой (точнее говоря, неразличимы при данных средствах измерения веса), потому что и первое и второе количества дадут одинаковые результаты, а именно $A + B\alpha$. Дальнейшие слагаемые и здесь и там отпадут.

Такие два количества будем называть **эквивалентными**. Точно так же, если даны количества:

$$M_1 = A + B\alpha + C\alpha^2 + D_1\alpha^3$$

и

$$M_2 = A + B\alpha + C\alpha^2 + D_2\alpha^3,$$

то, если пользоваться первыми, вторыми и третьими весами, эти два количества M_1 и M_2 тоже как бы равны между собой, эквивалентны. Они эквивалентны постольку, поскольку в нашем распоряжении только первые три типа весов. Если воспользоваться еще и четвертым типом весов, химическими весами, то количества M_1 и M_2 оказались бы не равными между собой, и их нельзя было бы считать эквивалентными. В то время как обычно принято понимать равенство только в абсолютном смысле (две величины могут быть или равны или не равны, третья возможность исключается), здесь мы встречаем новый условный тип равенства: результаты измерения величин M_1 и M_2 равны в одном смысле и не равны в другом (в нашем примере равны, если не пользоваться четвертыми весами, и не равны, если ими воспользоваться). Отсюда следует понятие **равенства до единиц данного разряда**.

Порядок малости

Если дано количество

$$M = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \dots,$$

то различным слагаемым правой части этого равенства принято давать особые названия:

$B\alpha$	называется	величиной	I	порядка	малости
$C\alpha^2$	„	„	II	„	„
$D\alpha^3$	„	„	III	„	„

A не получило особого названия; можно его считать величиной нулевого порядка малости.

Если вместо M взять A, то это значит, что отброшены все малые величины (даже I порядка). Если вместо M взять $A + B\alpha$, то это значит, что отброшены величины II (и высшего) порядка малости[1]. Если вместо M взять $A + B\alpha + C\alpha^2$, то это значит, что M взято с точностью до величин II порядка малости, но отброшены величины III порядка.

Обычно такой переход записывают, пользуясь волнистым знаком равенства:

$$M \approx A + B\alpha;$$

или

$$M \approx A + B\alpha + C\alpha^2.$$

Если записано приближенное равенство:

$$M \approx A + B\alpha + C\alpha^2,$$

то оно может означать:

$$M \approx A + B\alpha + C\alpha^2 + D_1\alpha^3,$$
$$M \approx A + B\alpha + C\alpha^2 + D_2\alpha^3,$$
$$M \approx A + B\alpha + C\alpha^2 + D_3\alpha^3$$

---

[1] Чем меньше взять α, тем больше будет разрыв между величинами различного порядка.

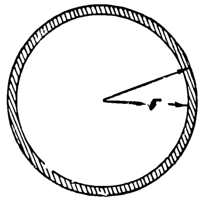
и т. д. Любое из таких равенств возможно; дальнейший коэфициент D может оставаться неопределенным; для нас он не имеет значения.

4. ПРИМЕРЫ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Покажем на примерах применение таких приближенных равенств.

Пример 1. Металлический диск радиуса r (черт. 12) вследствие нагревания расширился. При этом длина радиуса получила некоторый малый прирост. Найти прирост площади диска.

Условимся сначала относительно некоторых обозначений. В дальнейшем прирост некоторой переменной величины x мы будем называть *приращением* и обозначать через Δx (читается „дэльта икс“). Знак Δ—греческая буква „дэ“ (дэльта); сама по себе эта буква ничего не означает, а берется всегда слитно с рассматриваемой переменной величиной подобно тому как знак sin всегда приставляется к некоторому углу. Если радиус диска, изменяясь, принимает значения: $r = 2{,}00$; $r = 2{,}0003$; $r = 2{,}0006$; $r = 2{,}0009$;..., то приращение каждый раз равно 0,0003, и это записывается так: $\Delta r = 0{,}0003$.



Черт. 12.

Подобно тому, как $(\sin\alpha)^2$ не означает $\sin^2\alpha^2$, а есть квадрат синуса, точно так же $(\Delta r)^2$ будет означать квадрат приращения, в нашем примере $(0{,}0003)^2$. Читатель должен отличать приращение функции от приращения аргумента. Например, если дана функция $y = x^2$, то значениям $x = 4, 5, 6, 7\ldots$ отвечают значения $y = 16, 25, 36, 49\ldots$; здесь все приращения аргумента $\Delta x = 1$; приращения функции меняются: $\Delta y = 9;\ 11;\ 13;\ldots$

Решение. Площадь основного круга $S = \pi r^2$.

Площадь увеличенного круга равна $\pi(r + \Delta r)^2$.

Приращением площади круга будет узкое кольцо, охватывающее основной круг (черт. 12). Это приращение ΔS равно:

$$\pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi[r^2 + 2r\cdot(\Delta r) + (\Delta r)^2] - \pi r^2 =$$
$$= \pi[2r\cdot\Delta r + (\Delta r)^2] = 2\pi r\cdot\Delta r + \pi(\Delta r)^2.$$

Если приращение радиуса Δr весьма мало, например, выражается в десятитысячных долях, то $(\Delta r)^2$ будет выражаться в стомиллионных долях, и если решение задачи требует точности до четвертого десятичного знака, то величиной $(\Delta r)^2$ можно пренебречь. Тогда для искомого приращения получим приближенное равенство:

$$\Delta S \approx 2\pi r \cdot \Delta r.$$

К тому же результату можно прийти иначе. Площадь кольца приблизительно равна длине окружности, умноженной на ширину кольца. Но какую окружность взять? Если взять длину внутренней окружности, то получим $2\pi r \cdot \Delta r$, величину, меньшую искомой. Если взять внешнюю окружность, то получим $2\pi (r+\Delta r) \cdot \Delta r$, величину большую искомой. Поэтому искомое приращение ΔS удовлетворяет двойному неравенству:

$$2\pi r \cdot \Delta r < \Delta S < 2\pi (r+\Delta r)\,\Delta r$$

или

$$2\pi r \cdot \Delta r < \Delta S < 2\pi r \cdot \Delta r + 2\pi \cdot (\Delta r)^2.$$

Но крайние члены неравенства отличаются между собой на величину второго порядка малости (считая Δr величиной первого порядка малости). Отбрасывая ее, мы можем за ΔS принять любую из величин — левую или правую. Проще принять $2\pi r \cdot \Delta r$.

Пример 2. Шар-зонд на некоторой высоте имеет радиус r; при дальнейшем подъеме радиус получил приращение Δr. Найти приращение объема.

Решение такое же, как в предыдущем примере.

Первоначальный объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Увеличенный объем будет $\frac{4}{3}\pi (r+\Delta r)^3$.

Приращение объема ΔV равно разности этих величин:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi \left[r^3 + 3r^2 \cdot \Delta r + 3r \cdot (\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 \right] - \frac{4}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi \left[3r^2 \cdot \Delta r + 3r \cdot (\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 \right].$$

Если Δr весьма мало (величина I порядка малости), то $(\Delta r)^2$ и $(\Delta r)^3$ будут величинами II и III порядков малости. Отбрасывая их, найдем что,

$$\Delta V \approx \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot \Delta r, \text{ или}$$

$$\Delta V \approx 4\pi r^2 \cdot \Delta r.$$

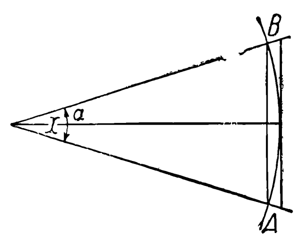
Пример 3. Показать, что для малого угла α можно $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ заменить через α.

Читателю известно, что длина окружности заключается между периметром вписанного и периметром описанного многоугольников. Обозначая периметр правильного вписанного многоугольника через l, периметр описанного — через L, длину окружности через $C = 2\pi R$, получим неравенство:

$$l < C < L,$$

или

$$l < 2\pi R < L. \qquad (1)$$



Черт. 13.

Если многоугольники имеют n сторон, то разделив все три величины на n, получим для небольшого отрезка дуги (черт. 13) $\left(\frac{1}{n}\text{ окружности}\right)$ неравенство:

$$a_n < \smile AB < b_n, \qquad (2)$$

где a_n — сторона вписанного, b_n — описанного мноугольника. Обозначим центральный угол, измеренный в радианах, равный $\frac{2\pi}{n}$, через x; тогда длина дуги равна Rx. Сторона вписанного многоугольника a_n равна удвоенной линии синуса угла $\frac{x}{2} = \alpha$; сторона описанного равна удвоенной линии тангенса того же угла. Поэтому равенство (2) запишется так:

$$2R \cdot \sin\frac{x}{2} < Rx < 2R \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

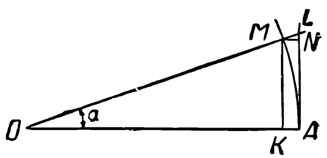
или, деля все члены неравенства на $2R$, получим:

$$\sin\frac{x}{2}<\frac{x}{2}<\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$

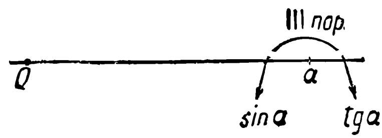
или, принимая $\frac{x}{2}=\alpha$:

$$\sin\alpha<\alpha<\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Будем α считать величиной I порядка малости; тогда и $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ также будут величинами I порядка [потому что, умножая все члены неравенства (1) на $n\cdot 2k$, мы получим весьма близкие между собой величины.]



Черт. 14



Черт. 15.

Докажем теперь, что они эквивалентны, т. е. равны с точностью до величин второго или более высокого порядка малости. С этой целью (черт. 14) рассмотрим разность:

$$LA-MK=LN=R\operatorname{tg}\alpha-R\sin\alpha=R(\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha).$$

Или, принимая длину радиуса R за единицу:

$$LN=\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha.$$

Имеем:

$$LN=MN\cdot\operatorname{tg}\alpha=(OA-OK)\cdot\operatorname{tg}\alpha=(1-\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

Но

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Величина $\sin\alpha$ I порядка малости, $\sin\frac{\alpha}{2}$ также I порядка. Поэтому

$$1-\cos\alpha\ldots\text{II порядка.}$$

Отсюда

$$LN=(1-\cos\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha\ldots\text{III порядка малости.}$$

Итак, мы показали, что разность $\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$ есть величина III порядка малости. А так как α заключено между ними (черт. 15), то разность $\alpha - \sin\alpha$ и разность $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$ подавно III порядка. Это значит, что если α измеряется в сотых долях единицы, то разность $\alpha - \sin\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha - \alpha$ будет измеряться в миллионных долях; если α в тысячных долях, то эти разности — в триллионных долях (10^{-9}). А потому $\sin\alpha$ и α; $\operatorname{tg}\alpha$ и α эквивалентны.

Пример 4. Если надо перемножить два двучлена $A+\alpha$ и $B+\beta$, где α и β — малые величины одного порядка (например, оба выражены в тысячных долях), то в произведении

$$(A+\alpha)(B+\beta) = AB + B\alpha + A\beta + \alpha\beta$$

можно отбросить последнее слагаемое, так как произведение двух малых I порядка дает величину II порядка малости. Например:

$$(6+0{,}002)(5+0{,}003) \approx 30 + 5\cdot 0{,}002 + 6\cdot 0{,}003;$$

Произведение $0{,}002\cdot 0{,}003 = 0{,}000006$ выражается в миллионных долях. Точно так же в произведении:

$$(A+\alpha)(B+\beta)(C+\gamma) = ABC + BC\alpha + AC\beta + AB\gamma + \\ + A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta + \alpha\beta\gamma,$$

ограничиваясь величинами I порядка, мы напишем:

$$(A+\alpha)(B+\beta)(C+\gamma) \approx ABC + (BC\alpha + AC\beta + AB\gamma)$$

и отбросим величину II порядка $(A\beta\gamma + B\gamma\alpha + C\alpha\beta)$ и величину III порядка $\alpha\beta\gamma$.

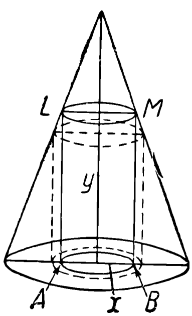
В следующей главе книги мы будем рассматривать малые изменения некоторой величины, а именно случаи, когда переменная величина A переходит в

$$M = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$$

Из приращения $B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots$ мы будем выделять малую I порядка, т. е. величину $B\alpha$, как наиболее существенную (весомую) часть. Чтобы показать, как производятся такого рода вычисления, приведем еще несколько примеров.

Пример 5. В данный конус вписан цилиндр. Найти приращение объема цилиндра при малом изменении радиуса основания его [цилиндр все время остается вписанным в конус (черт. 16)].

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через x, его высоту через y. Пусть радиус x увеличен до $x + \Delta x$. Тогда цилиндр станет толще, т. е. вокруг него появится новый облегающий слой; но одновременно с этим уменьшится высота цилиндра. Объем этого облегающего слоя равен площади кольца в основании, умноженной на высоту, т. е. приблизительно равен $2\pi x \cdot \Delta x \cdot y$ (см. пример 1). С другой стороны, убавится тонкий слой в верхней части цилиндра; объем этого слоя равен $\pi x^2 \cdot \Delta y$. Первое приращение считаем положительным, второе — отрицательным. В дальнейшем их придется сравнивать (при нахождении максимума объема цилиндра).



Черт. 16.

Но здесь у читателя может возникнуть сомнение, считать ли за высоту объемлющего слоя величину y (высоту в начале процесса изменения) или $y - \Delta y$ (высоту в конце процесса изменения)? Однако, можно избежать всяких сомнений, если воспользоваться понятием эквивалентности. Ведь, во всяком случае, положительное приращение заключается между величинами

$$2\pi x \cdot \Delta x \cdot y \text{ и } 2\pi x \cdot \Delta x \cdot (y - \Delta y)$$

или

$$2\pi x \cdot \Delta x \cdot y \text{ и } 2\pi x \cdot \Delta x \cdot y - 2\pi x \cdot \Delta x \cdot \Delta y,$$

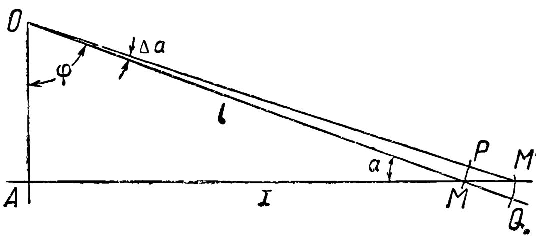
а эти величины с нашей точки зрения эквивалентны, так как отличаются на величину II порядка. За положительное приращение ΔV можно взять и то, и другое. Удобнее, ради простоты, взять первое. Точно так же, для отрицательного приращения мы можем выбирать между $\pi x^2 \cdot \Delta y$ и $\pi (x + \Delta x)^2 \cdot \Delta y$, т. е. $\pi x^2 \cdot \Delta y$ и $\pi x^2 \cdot \Delta y + 2\pi x \cdot \Delta x \cdot \Delta y + \pi (\Delta x)^2 \cdot \Delta y$, а эти выражения отличаются между собой на величины II и III порядка малости, которые можно отбросить.

Пример 6. Наблюдатель находится в точке M (черт. 17); он рассматривает колонну $AO = a$ и видит ее под углом, равным α. Пусть $AM = x$. Если наблюдатель перейдет в точку M', отступив на величину Δx, то угол α уменьшится (на величину $\Delta \alpha$).

Решим две задачи.

1) Можно ли заменить треугольник OMM' сектором OMP?

Первый способ Пусть Δx — малая величина (I порядка). $OM = l$; $OM' = l + \Delta l$. Опишем радиусом $OM = l$ дугу MP до встречи с прямой OM'. Дугу MP можно заменить хордой MP (пример 3), а угол MPO близок к 90°, а потому треугольник MPM' можно приближенно считать



Черт. 17.

прямоугольным. Нетрудно видеть, что стороны малого треугольника MPM' — величины одного порядка малости. Так как Δx считается I порядка, то и другие две стороны также I порядка; тогда и угол $\Delta\alpha$ (в радианах) I порядка.

Площадь всего треугольника OMM' есть величина I порядка. Она равна $\frac{1}{2} \cdot MM' \cdot OA = \frac{1}{2} a \cdot \Delta x$. Площадь малого треугольника $MPM' = \frac{1}{2}\ MP \cdot PM'$; но $MP < \Delta x$; $PM' < \Delta x$; поэтому пл. $\triangle\, MPM' < \frac{1}{2} \Delta x \cdot \Delta x = \frac{1}{2}\ (\Delta x)^2$, и является величиной II порядка. Это означает, что если Δx взято, например, в тысячных долях единицы (метра), то площадь малого треугольника MPM' будет исчисляться в миллионных долях (квадратного метра). Поэтому от треугольника OMM' можно отбросить треугольник MPM' и заменить треугольник OMM' сектором OMP.

Второй способ. Опишем еще дугу $M'Q$ из точки O радиусом $OM' = l + \Delta l$. Площадь сектора OMP равна $\frac{1}{2} l^2 \cdot \Delta\alpha$.

(Длина дуги равна $l \cdot \Delta\alpha$; площадь сектора равна половине произведения длины дуги на радиус).

Аналогично, площадь сектора $OM'Q$ равна:

$$\frac{1}{2}(l+\Delta l)^2 \cdot \Delta\alpha = \frac{1}{2}[l^2+2l \cdot \Delta l + (\Delta l)^2] \cdot \Delta\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}l^2 \cdot \Delta\alpha + l \cdot \Delta l \cdot \Delta\alpha + \frac{1}{2}(\Delta l)^2 \cdot \Delta\alpha.$$

У обоих секторов малые I порядка совпадают; следовательно, они эквивалентны по площади. А так как

$$\text{пл. } OMP < \text{пл. } \triangle\, OMM' < \text{пл. } OM'Q,$$

то треугольник OMM' эквивалентен любому из них, что и требовалось доказать.

2) Найти связь между $\Delta\alpha$ и Δx.

Первый способ. Дуга $MP = l \cdot \Delta\alpha$. Из „прямоугольного треугольника" MPM' имеем:

$$MM' = \Delta x = \frac{MP}{\sin(\alpha - \Delta\alpha)} \approx \frac{l \cdot \Delta\alpha}{\sin\alpha}.$$

[Последняя замена допустима, потому что разность между этими величинами есть:

$$l \cdot \Delta\alpha \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin(\alpha - \Delta\alpha)}\right);$$

но:

$$\sin\alpha = \frac{a}{l}; \quad \sin(\alpha - \Delta\alpha) = \frac{a}{l+\Delta l},$$

откуда

$$\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin(\alpha - \Delta\alpha)} = \frac{l}{a} - \frac{l+\Delta l}{a} = -\frac{\Delta l}{a};$$

поэтому выражение в скобках есть величина I порядка, а произведение — величина II порядка.]

Итак,

$$\Delta x = \frac{l \cdot \Delta\alpha}{\sin\alpha};$$

обратно:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x \cdot \sin\alpha}{l} = \frac{\Delta x}{l} \cdot \frac{a}{l} = \frac{\Delta x \cdot a}{l^2} = \frac{a \cdot \Delta x}{a^2 + x^2}.$$

Второй способ. В треугольнике OAM вместо угла α берем дополнительный угол $AOM = \varphi$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{a};\ \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{x + \Delta x}{a}.$$

Берем тангенс разности этих углов по формуле:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$

Получим:

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi - \varphi) = \frac{\frac{x + \Delta x}{a} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x}{a} \cdot \frac{x + \Delta x}{a}}.$$

Или

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) = \frac{\frac{\Delta x}{a}}{1 + \frac{x^2 + x \cdot \Delta x}{a^2}} \approx \frac{\frac{\Delta x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{a \cdot \Delta x}{a^2 + x^2}.$$

Но на основании сказанного в примере 3 имеем:

$$\operatorname{tg}(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi;$$

из черт. 17 следует, что $\Delta\varphi = \Delta\alpha$ (по абсолютной величине), откуда окончательно:

$$\Delta\alpha \approx \frac{a \cdot \Delta x}{a^2 + x^2}.$$

Из приведенных примеров видно, в чем состоит способ приближенных вычислений. Малые величины как бы распределяются по разрядам. Нулевой разряд, или порядок, — это конечные, обычные числа, первый разряд — малые величины α, β, $\gamma, \ldots$; второй разряд — это величины вида α^2, β^2, γ^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma, \ldots$; третий разряд — величины вида α^3; β^3; $\alpha\beta^2$, $\alpha\beta\gamma, \ldots$ При сравнении двух количеств принимаются во внимание единицы более низкого разряда. Для нас будут иметь значения именно величины первого разряда; величины второго и третьего разрядов как бы выпадают, отбрасываются.

Какую же величину считать малой? Считать ли малой $\alpha = \frac{1}{100}$ и отбрасывать величину вида $\alpha^2 = \frac{1}{10\,000}$? Или такое исчисление слишком грубо? Считать ли малым $\alpha = \frac{1}{1\,000}$ и отбрасывать величины вида $\alpha^2 = \frac{1}{1\,000\,000}$?

Практически этот вопрос решается тем, какая точность измерения требуется. Теоретически мера величины α остается произвольной. В следующей главе мы будем считать величину α настолько малой, что отбрасывание величин второго и третьего порядков совершенно не влияет на результат вычислений. Но в таком случае понятие точного равенства можно заменить более широким, более гибким понятием эквивалентности. Такое отступление от обычных точных арифметических и алгебраических равенств (и неравенств) может на первых порах показаться неправильным читателю, может даже отпугнуть читателя. Однако, пусть он вооружится терпением: это отступление есть лишь начало нового наступления и в дальнейшем читатель сумеет убедиться в целесообразности введения понятия эквивалентности.

ГЛАВА II.

МЕТОД МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ.

1. ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДА.

В первой главе мы решили ряд задач на нахождение максимума и минимума, причем для решения их мы прибегали к различным искусственным приемам. А именно, в каждой задаче мы, сообразуясь с ее особенностями, сводили решение тем или иным путем к другому вопросу, решение которого оказывалось почти очевидным.

Но отыскивать для всякой, предложенной нам задачи на максимум-минимум новый искусственный прием было бы крайне неудобно. Поэтому математика, как и другие науки, стремится найти общий прием, общий метод для решения подобного рода задач. Уже в XVII в. ученые Ферма и Вивиани написали специальные сочинения на эту тему. Точное и исчерпывающее решение этого вопроса вместе со многими другими было дано изобретением диференциального исчисления. Об этом универсальном методе читатель узнает в последней главе.

В настоящей главе мы дадим общий прием, пригодный для определенной группы задач. Достаточно будет уяснить себе этот прием на двух-трех задачах, чтобы получить возможность решать таким же путем целый ряд интересных задач, встречающихся в практической работе. Мы назовем этот прием методом малых приращений, так как изменение всякой величины (например изменения угла φ в задаче с плакатом) мы будем рассматривать как составленное из последовательных очень малых изменений, а для таких малых изменений мы сумеем, пользуясь результатами предыдущей главы, писать довольно простые формулы. Конечно, лучше всего читатель уяснит себе дело на практике, посмотрев, как этим методом решаются задачи. Предварительно дадим только некоторые пояснения. Начнем с примера.

Если спросить, когда в летний жаркий день температура воздуха наибольшая, то каждый по опыту скажет, что это бывает приблизительно около часа дня. А ведь солнце бывает выше всего в полдень, в 12 часов дня, и в этот момент оно посылает наибольшее количество лучей. Почему же наибольшая температура не приходится на полдень? Причина заключается в том, что надо учитывать два обстоятельства (два фактора): количество падающих солнечных лучей и лучеиспускание (расход тепла в окружающую среду). И до полудня и после полудня происходит испускание тепла нагретыми слоями атмосферы в вышележащие слои и окружающую среду, причем интенсивность этого лучеиспускания постепенно возрастает. Наоборот, количество тепла, даваемого солнечными лучами, после 12 часов дня постепенно уменьшается. Но от 12 часов приблизительно до часа дня поступление тепла остается больше, чем расход через лучеиспускание, и в результате общее количество тепла увеличивается, температура воздуха повышается. Однако наступит момент, когда поступление и расход тепла уравновесятся, а в дальнейшем расход тепла станет больше, чем поступление, и общее количество тепла (и температура) начнет уменьшаться. Указанный момент и будет моментом максимальной температуры [1].

В действительности вопрос о тепловом состоянии атмосферы гораздо сложнее. Надо еще учитывать облачность, влажность воздуха, ветры и т. д. Мы упростили физическое явление, рассматривая воздействие лишь двух факторов, двух причин (солнечных лучей и лучеиспускания), действующих в противоположных направлениях. Переломный момент, в нашем примере—максимум температуры,

---

[1] Расход тепла через лучеиспускание после 12 часов может даже уменьшаться, но быстрота этого уменьшения должна быть меньше, чем быстрота уменьшения количества тепла, доставляемого солнечными лучами.

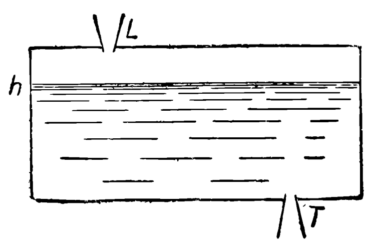
имеет ту особенность, что прибавки (приращения) тепла, положительные и отрицательные, в этот момент уравновешиваются.

Рассмотрим еще один пример.

Пусть в закрытом бассейне вода находится на уровне h (черт. 18). Через воронку в точке L вливается вода, причем скорость притока воды постепенно уменьшается. Одновременно с этим через трещину в точке T вода вытекает, причем трещина увеличивается, так что скорость вытекания воды растет. Пусть, например, по минутам

	втекает	вытекает
1-я минута	10 $см^3$	1 $см^3$
2 „	9 „	3 „
3 „	8 „	5 „
4 „	7 „	7 „
5 „	6 „	9 „
6 „	5 „	11 „
7 „	4 „	13 „

В первые минуты втекает больше, чем вытекает, и уровень воды в бассейне будет повышаться. Затем, в течение некоторого малого промежутка времени, скорости втекания и вытекания будут приблизительно равны, втекание и вытекание уравновешиваются, и уровень воды не будет заметно изменяться. В дальнейшие минуты будет больше вытекать жидкости, чем втекать, и уровень воды в бассейне начнет понижаться. Отсюда следует: уровень воды h достигнет наибольшей высоты (максимума) в тот момент, когда скорости втекания и вытекания окажутся равными. В нашем примере это будет в 4-ю минуту.



Черт. 18.

В дальнейших задачах нам придется точно так же рассматривать изменение переменной величины F, которая получает последовательный ряд приращений положительных и отрицательных (друг под другом стоят происходящие одновременно положительные и отрицательные приращения, например m_1 и n_1).

$$F = A + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + \ldots + m_i + \ldots$$
$$- n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - \ldots - n_i - \ldots,$$

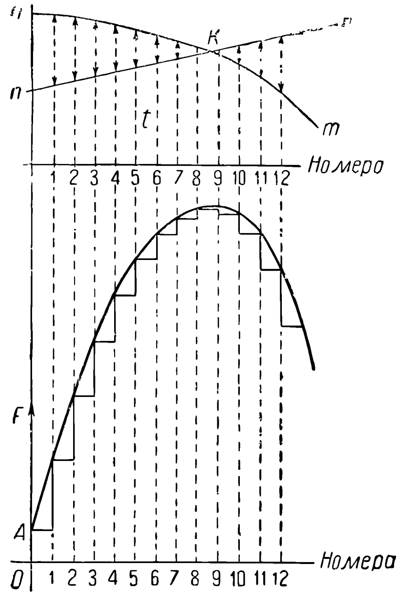
т. е.

$$F = A + (m_1 - n_1) + (m_2 - n_2) + (m_3 - n_3) + \ldots + $$
$$+ (m_i - n_i) + \ldots \qquad (1)$$

Допустим, что сначала числа m больше чисел n, и что постепенно приращения m становятся меньше, а приращения n становятся больше. Тогда слагаемые $(m_1 - n_1)$, $(m_2 - n_2)$, $(m_3 - n_3)$ ... сначала остаются положительными, и величина F будет возрастать. Но постепенно эти разности $m_i - n_i$ становятся меньше, возрастание F становится замедленным. И это возрастание F прекратится тогда, когда $m_i - n_i$ подойдут к нулю, и затем, начиная с некоторого номера i, из положительных чисел обратятся в отрицательные. После того как $m_i - n_i$ станут отрицательными, новые слагаемые суммы (1) будут только уменьшать величину F, и она будет убывать. А так как мы ищем максимум для F, то надо отметить именно переломный момент, момент прекращения возрастания и начала убывания. Этот момент определяется тем, что разность $m_i - n_i$ должна обратиться в нуль, т. е. $m_i = n_i$. Заметим еще, что мы будем брать эти приращения весьма малыми, а число таких приращений весьма большим; ход рассуждений при этом остается прежним [1].

[1] Можно предположить, что дробление приращений продолжается как угодно далеко, т. е. допустить теоретически, что число их n_i растет до бесконечности; тогда каждое из них стремится к нулю или, как говорят, становится „бесконечно малым". И в этом случае ход рассуждения сохраняется, но появляются некоторые особенности этих малых величин, меняется их характер. Вычисление с такими „бесконечно малыми" есть основной прием диференциального исчисления. Некоторые пояснения читатель получит в последней главе, но, вообще говоря, этот вопрос относится всецело к высшей математике.

Сказанное поясним также и графически (черт. 19).



Черт. 19.

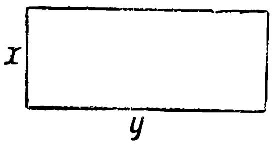
В верхней части чертежа представлены приращения положительные m и отрицательные n (и те и другие по абсолютной величине). Расстояние между линиями mm и nn по вертикали показывает для каждого номера, какое из приращений больше и насколько. До точки K положительные приращения перевешивают, после нее—отрицательные. В нижней части чертежа представлено изменение величины F. Сначала она равна A. Затем она получает ряд приращений по вертикали, равных соответственно отрезкам между mm и nn в верхней части. Начиная от номера 9 и дальше, величина F начинает убывать. Максимум F имеет место между номерами 8 и 9.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ.

В нижеследующих задачах требуется найти максимум или минимум некоторой величины F (например площади, объема и т. д.); она ставится в зависимость от переменных x, y (аргумента). Аргументу x дают последовательный ряд приращений Δx, вследствие чего и рассматриваемая в задаче величина F получает ряд приращений. При этом одновременно будут иметь место как положительные, так и отрицательные приращения. В каждой отдельной задаче производится анализ этих приращений. При этом одни приращения (например положительные) будут убывать, другие возрастать. Решение задачи состоит в том, чтобы уловить момент равенства приращений и отметить значение аргумента (одного или нескольких) для этого момента.

Перейдем теперь к решению задач.

Задача 1. Имеется проволока длиной $2l$. Надо согнуть ее в прямоугольник так, чтобы площадь, ограниченная им, была возможно большей (максимальной). Численный пример: $2l = 72$ *см.*



Черт. 20.

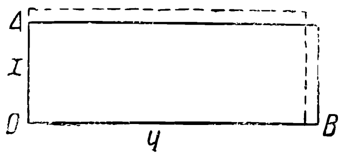
Решение. Обозначим одну сторону прямоугольника через x, другую через y (черт. 20); тогда $2x + 2y = 72$; откуда $x + y = 36$. Пусть сначала x мало; например, $x = 6$ *см*; тогда $y = 30$; площадь $S = 6 \cdot 30 = 180$ *см*^{2}. Если мы x уменьшим, например, примем $x = 5$ *см*, то y увеличится: $x = 5$; $y = 31$; $S = 5 \cdot 31 = 155$ *см*^{2}. Если принять $x = 4$ *см*, то $y = 32$ *см*; площадь $S = 4 \cdot 32 = 128$ *см*^{2}. Очевидно, уменьшение x (и увеличение y) влечет за собой уменьшение площади. Чтобы отыскать условие для наибольшей площади, пробуем увеличивать x (за счет y). Ниже помещена таблица, где переменное x получает возрастающие значения:

x	y	S	x	y	S
6	30	180	14	22	308
7	29	203	15	21	315
8	28	224	16	20	320
9	27	243	17	19	323
10	26	260	18	18	324
11	25	275	19	17	323
12	24	288	20	16	320
13	23	299	21	15	315

Из этой таблицы следует, что для нахождения максимума площади надо увеличивать x до 18. Будет ли достигнут максимум именно при $x = 18$, на основании данной таблицы сказать трудно. Может, например, оказаться, что при $x = 18^1/_2$ площадь S получит значение большее, чем 324; но простым подсчетом можно убедиться, что значения $x=18$, $y=18$ дают больше, чем всякая другая пара значений x и y.

Можно было бы всякую задачу на максимум (или минимум) решать путем составления такого рода таблицы, где испытывается последовательно целый ряд значений переменных. Однако, этот путь длинный. Желательно найти более короткий путь, ведущий прямо к цели и позволяющий сразу найти те значения x, y, ... которые дают максимум или минимум рассматриваемой величины. Поэтому решим эту же задачу другим путем (методом приращений).

Будем опять исходить от небольшого значения x (черт. 21). Пусть x получит небольшое приращение Δx (например, вместо $x=6$, возьмем $x=6{,}5$ или $6{,}05$ или $6{,}01$ и т. д.); тогда получим добавочную горизонтальную полоску длиною y и равную по площади $y \cdot \Delta x$. Но поскольку сумма $x+y$ должна оставаться постоянной, придется y убавить на столько же: Δy по абсолютной величине равно Δx. Вследствие этого необходимо будет убавить вертикальную полоску, равную по площади $x \cdot \Delta y$ [1].



Черт. 21.

У нас x взято гораздо меньшим, чем y; поэтому положительное приращение $y \cdot \Delta x$ больше (по абсолютной величине) отрицательного $x \cdot \Delta y$: горизонтальная полоска больше вертикальной. В результате новый прямоугольник со сторонами $x+\Delta x$; $y-\Delta y$ по площади больше исходного. Поэтому, например, вместо сторон $x=6$; $y=30$ выгодно взять $x=6^1/_2$; $y=29^1/_2$, затем $x=7$; $y=29$, затем $x=7^1/_2$; $y=28^1/_2$ и т. д. Будем мысленно продолжать этот процесс увеличения x (и

[1] Точнее говоря, если сначала увеличить x, а затем только уменьшать y, то придется убавить площадку, равную $(x+\Delta x) \cdot \Delta y = x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$. Но это количество отличается от предыдущего $(x \cdot \Delta y)$ на $\Delta x \cdot \Delta y = (\Delta x)^2$, т. е. на величину II порядка малости, если считать Δx величиною I порядка. Поэтому при выборе между количествами $x \cdot \Delta y$ и $x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y$ можно взять любое из них (см. главу I). Обратно, если сначала уменьшить y, а затем увеличить x, то сперва убавится полоска $x \cdot \Delta y$, а потом прибавится горизонтальная полоска $(y-\Delta y) \cdot \Delta x = y \cdot \Delta x - \Delta y \cdot \Delta x$. И для той и для другой полоски разница оказывается величиной II порядка.

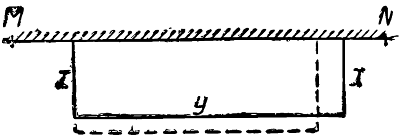
уменьшения y) до тех пор, пока положительные приращения остаются большими, чем отрицательные; при этом площадь будет все время возрастать. Этот рост площади приостановится в тот момент, когда отрицательное приращение станет равным положительному (вертикальная полоска станет равной горизонтальной). Этот момент сразу определяется равенством:

$$y \cdot \Delta x = x \cdot \Delta y \tag{1}$$

(берем оба приращения по абсолютной величине); а так как в нашей задаче $\Delta x = \Delta y$, то получим искомое условие для максимума:

$$y = x,\text{[1]} \tag{2}$$

т. е. стороны должны быть равны. Продолжать дальнейшее увеличение x не имеет смысла, так как теперь отрицательные приращения станут больше положительных, и площадь прямоугольника будет только уменьшаться. Таким образом равенство (1) решает задачу. *И при решении дальнейших задач основное — это приравнять положительное и отрицательное приращения.*



Черт. 22.

Задача 2 (см. задачу 6 главы I). У каменной стены надо пристроить ограду в форме прямоугольника; длина ограды заранее дана (равна l). Какие размеры придать ей, чтобы площадь, ею ограниченная, была возможно большей, максимальной (черт. 22)?

Решение. Обозначим ширину площадки через x, длину ее через y. Допустим, что сначала x гораздо меньше, чем y (например в 5 раз). Если дать x приращение Δx, то придется длину y укоротить на величину $\Delta y = 2 \cdot \Delta x$, так как длина ограды $2x + y$ должна оставаться постоянной. При этом, с одной стороны, появится новая горизонтальная полоска, по площади равная

---

[1] Может возникнуть сомнение: является ли равенство (2) точным ввиду приближенного равенства приращений (1), но вопрос о том, какое из приращений больше, решается сравнением членов I порядка малости (см. пример с гирями в главе I); величинами II порядка можно пренебречь.

$y \cdot \Delta x$; с другой стороны, отпадет вертикальная полоска, по площади равная $(x+\Delta x) \cdot \Delta y \approx x \cdot \Delta y$. Как и в предыдущей задаче, сначала положительные приращения $y \cdot \Delta x$ больше отрицательных. Но постепенно положительные приращения становятся меньше, а отрицательные — увеличиваются. Чтобы добиться максимальной площади, надо продолжать процесс увеличения ширины x до того момента, когда положительные и отрицательные приращения окажутся равными. Получаем уравнение:

$$y \cdot \Delta x = x \cdot \Delta y, \tag{1}$$

где Δy и Δx берутся по абсолютной величине.

Вместе с тем в нашей задаче $\Delta y = 2 \cdot \Delta x$; поэтому вместо (1) можно написать:

$$y \cdot \Delta x = x \cdot 2 \cdot \Delta x, \tag{2}$$

откуда

$$y = 2x. \tag{3}$$

Мы предположили, что сначала x было гораздо меньше y. Полученное равенство (3) показывает, что увеличивать x надо до момента, когда выполняется равенство $y = 2x$, или $x = {}^1/_2 y$. Если, например, $l = 100$ *м*, то надо взять $x = 25$ *м*; $y = 50$ *м*. Дальнейшее увеличение x (и уменьшение y) влечет за собой уже уменьшение площади.

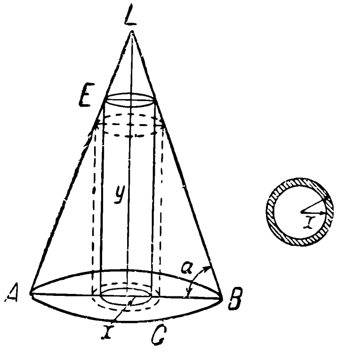
Примечание. В дальнейших задачах мы не будем повторять каждый раз рассуждения о приращениях, а найдя положительное и отрицательное приращения, будем записывать их в виде:

$$+y \cdot \Delta x \ldots -x \cdot \Delta y$$

и, учитывая связь между Δx и Δy, сравнивать их без знака (т. е. по абсолютной величине).

Задача 3. В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение. Обозначим угол образующей конуса с плоскостью основания через α; радиус основания цилиндра через x; высоту цилиндра через y (черт. 23). Рассмотрим сначала тонкий и высокий цилиндр; тогда x гораздо меньше, чем y. Затем дадим радиусу цилиндра x некоторое малое приращение Δx. Тогда вокруг цилиндра появится добавочный, облегающий его слой, объем которого равен площади добавочного кольца в основании цилиндра, умноженной на высоту. Поэтому положительное приращение объема равно $2\pi x \cdot \Delta x \cdot y$ (см. задачу 1 главы I).



Черт. 23.

С другой стороны, мы получаем отрицательное приращение, так как убавится верхний тонкий слой цилиндра; объем этого слоя равен $\pi x^2 \cdot \Delta y$. Итак, получаем два приращения:

положительное:

$$+2\pi x \cdot \Delta x \cdot y,$$

отрицательное:

$$-\pi x^2 \cdot \Delta y$$

(считая Δy по абсолютной величине).

Мы запишем это в таком виде:

$$+2\pi x \cdot \Delta x \cdot y \ldots -\pi x^2 \cdot \Delta y.$$

По нашему предположению, сначала x было гораздо меньше, чем y (например в 10 раз). Тогда положительное приращение больше отрицательного: первое содержит множитель $x \cdot y$, второе x^2. Но постепенно y уменьшается, x увеличивается, и положительное приращение убывает, отрицательное возрастает (по абсолютной величине). Решение задачи, как и раньше, дается приравниванием приращений:

$$2\pi x \cdot \Delta x \cdot y = \pi x^2 \cdot \Delta y. \tag{1}$$

Это уравнение дает искомые размеры вписанного цилиндра. Чтобы им воспользоваться, остается еще учесть связь между Δx и Δy. Связь между ними легко определится, если помнить, что окружность верхнего основания цилиндра должна касаться боковой поверхности конуса, т. е. в главном сечении конуса ALB точка E цилиндра должна скользить вдоль образующей LA. Следовательно:

$$\Delta y = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде:

$$2\pi xy \cdot \Delta x = \pi x^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x, \tag{3}$$

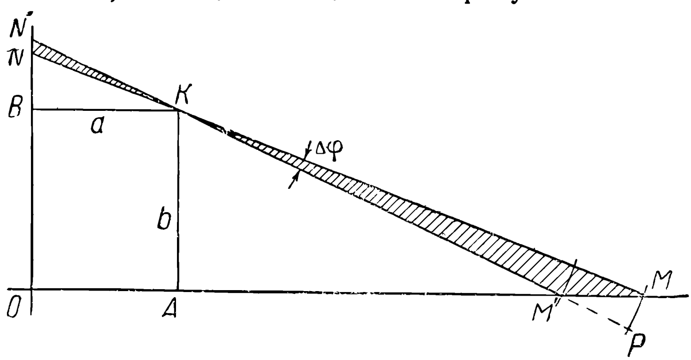
или, сокращая на общих множителей:

$$2y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Итак, максимум получится при условии (4), т. е. когда $y : x = {}^1/_2 \operatorname{tg}\alpha$, или $y : {}^1/_2 x = \operatorname{tg}\alpha$.

Но из черт. 23 видно, что $y : CB = \operatorname{tg}\alpha$. Значит, $CB = \frac{1}{2}x$ и $\frac{3}{2}x = R$. Отсюда $x = \frac{2}{3}R$. Поэтому радиус цилиндра следует взять равным $\frac{2}{3}$ радиуса основания конуса.

Задача 4. На плоскости даны две оси координат и точка K так, что $KB = a$, $KA = b$. Требуется из всевоз-



Черт. 24.

можных прямых, проходящих через точку K, выбрать ту, которая отсекает на осях координат треугольник MON минимальной площади (черт. 24).

Решение. Допустим сначала, что точка M находится весьма далеко направо. Нетрудно видеть, что в этом случае площадь треугольника MON будет весьма большой (и, конечно, не минимальной). Передвинем точку M слегка налево (на отрезок MM'). Тогда полупрямая KM повернется около точки K на некоторый малый угол $\Delta\varphi$, и одновременно полупрямая KN повернется на такой же (равный ему) угол $\Delta\varphi$. Площадь отсекаемого треугольника MON получит отрицательное приращение, равное площади тонкого треугольника KMM', и положительное, равное площади треугольника NKN'. Обозначим длину KM через l_1, длину KN через l_2. Беря приращение угла $\Delta\varphi$ весьма малым (I порядка), можно будет тонкий треугольник KMM' приближенно заменить сектором с радиусом KM' или с радиусом KM (см. конец главы I), если отбросить малые величины II порядка. Поэтому площадь треугольника KMM' приближенно равна длине дуги MP, умноженной на половину радиуса:

$$\text{пл.}\, \triangle\, KMM' \approx l_1 \cdot \Delta\varphi \cdot \frac{1}{2} l_1 = \frac{1}{2} l_1^2 \cdot \Delta\varphi.$$

Аналогично, площадь вновь появляющейся полоски KNN' приближенно принимаем за сектор, и ее площадь приближенно равна: $\frac{1}{2} l_2^2 \cdot \Delta\varphi$. Поэтому противопоставляются приращения: отрицательное $-\frac{1}{2} l_1^2 \cdot \Delta\varphi$, положительное $+\frac{1}{2} l_2^2 \cdot \Delta\varphi$.

Здесь — при отыскании минимума — будет иметь место картина приращений, обратная той, какую мы встречали при нахождении максимума. Здесь сперва отрицательные приращения по абсолютной величине больше положительных, и рассматриваемая площадь треугольника MON убывает. Но постепенно отрицательное приращение уменьшается (сектор MKM'), положительное увеличивается (сектор NKN'), убывание площади треугольника MON замедляется, и, наконец, при равенстве приращений

$$\frac{1}{2} l_1^2 \cdot \Delta\varphi = \frac{1}{2} l_2^2 \cdot \Delta\varphi \qquad (1)$$

убывание прекращается, площадь треугольника MON достигает минимума, с тем, чтобы при дальнейшем повороте прямой MN по часовой стрелке площадь треугольника MON начала уже возрастать. Поэтому уравнение (1) дает искомое условие минимума. Из него следует:

$$l_1 = l_2,$$

т. е. отрезок MN должен в точке K делиться пополам.

Из подобия треугольников NOM и KAM следует, что в этом случае $OM=2AM=2a$; аналогично $ON=2b$; а потому MN должна быть параллельна диагонали AB.

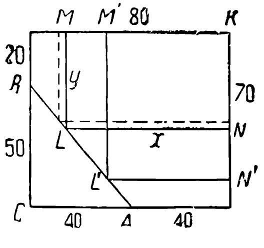
На приведенных задачах читатель может уже видеть, в чем состоит метод малых приращений. Постараемся вкратце формулировать сущность этого метода.

В задаче требуется найти максимум или минимум некоторой величины F (например объема вписанного цилиндра). Изменение F ставится в связь с изменением другой, основной величины (например радиуса основания цилиндра x). Итак, имеется функция F и аргумент x (или несколько аргументов x, y, z,..., связанных между собой). Аргументу x дается последовательный ряд малых приращений Δx; но тогда и величина F вынуждена изменяться и получает ряд малых приращений. Для определенного типа задач, рассматриваемого в этой главе, приращения ΔF можно считать как бы сложенными (алгебраически) из двух приращений: положительного и отрицательного. Например, для цилиндра, вписанного в конус, при увеличении радиуса основания цилиндра получается, с одной стороны, новый облегающий слой вокруг цилиндра (положительное приращение), и с другой стороны, высота цилиндра делается меньше, и поэтому исчезает верхний слой цилиндра (отрицательное приращение). Фактическое приращение объема цилиндра ΔF есть алгебраическая сумма этих двух приращений. Эти приращения, в свою очередь, не остаются равными себе при следующих друг за другом приращениях аргумента Δx. Например, положительные приращения — новые облегающие слои цилиндра — изменяются, так как изменяется радиус основания x и высота цилиндра y; отрицательные приращения — отпадающие верхние слои цилиндра — изменяются, так как изменяется радиус основания слоя, т. е. x. Первые приращения при возрастании аргумента x все время убывают, вторые приращения все время возрастают (по абсолютной величине). Поэтому в известный момент эти положительные и отрицательные приращения оказываются равными, точнее говоря, эквивалентными (см. объяснение в главе I); найти этот переходный момент и значит решить задачу.

В нижеследующих задачах мы не будем опять возвращаться к объяснению метода, а будем прямо решать их этим методом, потому что принцип решения во всех задачах остается одним и тем же.

Задача 5. Дана прямоугольная металлическая пластинка размером 80 на 70 *см* со срезанным углом вдоль AB ($BC = 50$; $CA = 40$). Требуется из этого куска жести вырезать прямоугольник $MLNK$ наибольшей площади (черт. 25).

Решение. Пусть сначала точка L находится близ точки B; тогда x близко к 80. Дадим x отрицательное приращение Δx; тогда сторона $ML = y$ увеличится на некоторое Δy.



Черт. 25.

Как видно из чертежа, от площади $MLNK$ убавится вертикальная полоска, приблизительно равная $y \cdot \Delta x$, и к ней прибавится горизонтальная полоска, приблизительно равная $x \cdot \Delta y$. Поэтому надо сравнивать приращения:

положительное

$$+x \cdot \Delta y$$

отрицательное

$$-y \cdot \Delta x.$$

Связь между Δx и Δy определяется из того, что точка L должна скользить вдоль BA. Рассматривая около точки L весьма малый треугольник со сторонами Δx и Δy (подобный треугольнику BCA), легко видеть, что,

$$\Delta y : \Delta x = BC : CA = 5 : 4,$$

или

$$\Delta y = \frac{5}{4} \Delta x.$$

Заменяя Δy его значением через Δx, получим приращения в виде:

$$+x \cdot \frac{5}{4} \Delta x \cdot \quad \cdot \quad \cdot -y \cdot \Delta x.$$

Приравниваем их:

$$x \cdot \frac{5}{4} \cdot \Delta x = y \cdot \Delta x.$$

Откуда:

$$\frac{5}{4} x = y, \text{ или } y : x = 5 : 4,$$

т. е. для максимума необходимо, чтобы диагональ MN была параллельна линии среза.

Задача 6. Из квадратного листа жести желательно приготовить открытую коробку следующим образом: по углам вырезать равные квадраты, а затем согнуть выступы по линии $MNPQ$. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы получилась коробка наибольшей вместимости (черт. 26)?

Решение. Обозначим сторону всего квадрата через a, сторону вырезаемых квадратов через x. При малом значении x высота коробки будет малой и вместимость ее невелика. Пусть x получило приращение

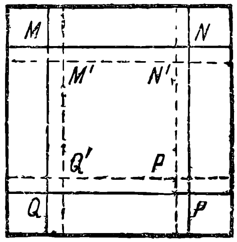
Δx (т. е. мы вырезаем квадратики побольше). Тогда площадь основания образуемой коробки $MNPQ$ уменьшится на величину ΔS, приблизительно равную $(a-2x)\cdot\Delta x\cdot 4$ (приблизительно потому, что сто оны нового основания $M'N'P'Q'$ будут уже меньше) потому объем коробки уменьшится на величину:

$$\Delta V=(a-2x)\cdot\Delta x\cdot 4\cdot x$$

(если не учитывать одновременного увеличения высоты коробки). С другой стороны, высота коробки увеличится на Δx, и объем коробки получит приращение в виде нового верхнего слоя, по объему приблизительно равного:

$$\Delta V=(a-2x)^2\cdot\Delta x$$

(приблизительно, так как не учитывается одновременное уменьшение площади основания). Итак, приращения будут



Черт. 26.

$$+(a-2x)^2\cdot\Delta x\ldots-(a-2x)\cdot\Delta x\cdot 4\cdot x.$$

И в том и в другом приращении допущенная неточность представляет собой величину II порядка малости и потому эти неточности не имеют значения при сравнении положительных и отрицательных приращений (см. пример с гирями в главе I). Получаем уравнение:

$$(a-2x)^2\cdot\Delta x=4x(a-2x)\cdot\Delta x,$$

или

$$a-2x=4x;$$

откуда

$$a=6x;\ x=\frac{a}{6}.$$

Задача 7. Из пластинки жести в форме правильного многоугольника требуется построить коробку следующим образом. Внутри многоугольника взять другой, подобный и одинаково расположенный относительно центра. Из точек $A_1B_1C_1\ldots$ опустить перпендикуляры на стороны и вырезать заштрихованные четырехугольники; затем отогнуть вдоль пунктира (черт. 27).

Решение такое же, как и в предыдущей задаче. Обозначим ширину отогнутого края через x, всю апофему через $x+y$.

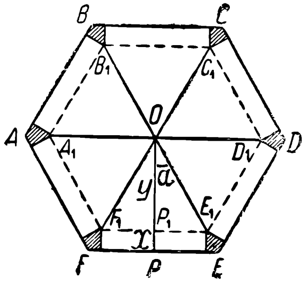
Начнем рассмотрение с небольших значений x. Пусть x получило приращение Δx. Тогда площадь треугольника OF_1E_1 уменьшится приблизительно на $2\cdot y\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$; все основание уменьшится на $n\cdot 2y\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$, и уменьшение объема коробки (не учитывая увеличения ее высоты) равно $n\cdot 2y\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x\cdot x$.

Приращение (положительное) объема вследствие увеличения высоты коробки равно $n\cdot y\cdot y\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta x$.

Сравниваем

$$ny^2\,\mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x = 2nxy\,\mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta x$$

и получаем после сокращения на общих множителей,



Черт. 27.

$$ny^2 = 2nxy;$$

короче

$$y = 2x.$$

Пока $y > 2x$, следует увеличивать x. Решение дается равенством $y = 2x$. Это значит, что $x = \frac{1}{3}(x+y)$, т. е. отгибается полоска, равная по ширине одной трети апофемы.

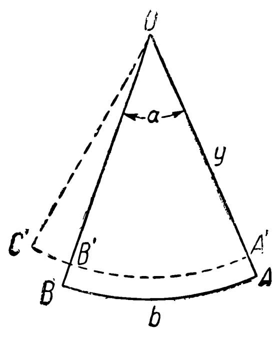
Примечание. Предыдущая задача есть частный случай только что решенной при $n = 4$.

Задача 8. Дана цепь определенной длины L. Требуется придать ей форму сектора, притом так, чтобы площадь его была возможно большей (черт. 28).

Решение. Обозначим длину радиуса через y; центральный угол через α (в радианной мере). Тогда длина дуги $l = y\alpha$. Мы начнем рассмотрение с длинного, весьма узкого сектора, т. е. такого, у которого угол α мал, а радиус y значительный ($2y$ близко к L). Прежде всего рассмотрим связь между приращениями длины радиуса Δy и центрального угла $\Delta\alpha$. Длина обвода постоянна:

$$2y + y\alpha = L.$$

Если уменьшить длину радиуса на $AA' = \Delta y$, то обвод уменьшится на сумму отрезков $AA' + BB' = 2\Delta y$ и, кроме того, дуга AB заменится меньшей дугой $A'B'$, и это уменьшение равно $y\alpha - (y - \Delta y) \cdot \alpha = \alpha \cdot \Delta y$. Поэтому обвод сектора $OA'B'$ меньше заданного L на величину $2\Delta y + \alpha \cdot \Delta y$. Придется увеличить на столько же дугу $A'B'$; пусть новая дуга будет $A'C' = A'B' + B'C'$. Но длина $B'C' = (y - \Delta y) \cdot \Delta\alpha \approx y \cdot \Delta\alpha$. Отсюда следует связь между приращениями:



Черт. 28.

$$y \cdot \Delta\alpha \approx 2\Delta y + \alpha \cdot \Delta y, \text{ или } (2+\alpha) \cdot \Delta y = y \cdot \Delta\alpha. \qquad (1)$$

Перейдем к рассмотрению положительных и отрицательных приращений площади. Из чертежа следует, что при замене сектора AOB сектором $A'OC'$ уничтожается площадка $AA'B'B$ и добавляется площадка

$B'OC'$. Площадь полосы $AA'B'B$ приблизительно равна длине дуги l [за дугу l можно взять или дугу AB, или дугу $A'B'$][1], умноженной на ширину этой полосы, т. е. $l \cdot \Delta y = y\alpha \cdot \Delta y$. Площадь сектора $OB'C'$ приблизительно равна:

$$\frac{1}{2}(y - \Delta y)^2 \cdot \Delta\alpha \approx \frac{1}{2} y^2 \cdot \Delta\alpha$$

[длина дуги равна $(y - \Delta y) \cdot \Delta\alpha$, радиус равен $y - \Delta y$]. Поэтому надо сравнивать приращения:

$$+\frac{1}{2} y^2 \cdot \Delta\alpha \ldots -y\alpha \cdot \Delta y.$$

Для нахождения максимума надо их приравнять друг другу:

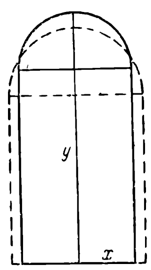
$$\frac{1}{2} y^2 \cdot \Delta\alpha = y\alpha \cdot \Delta y \text{ или } \frac{1}{2} y \cdot \Delta\alpha = \alpha \cdot \Delta y. \qquad (2)$$

Но в таком виде уравнением нельзя воспользоваться. Надо учесть связь приращений $\Delta\alpha$ и Δy, даваемую равенством (1). Имеем: $2\alpha \cdot \Delta y = y \cdot \Delta\alpha$; но $y \cdot \Delta\alpha = (2+\alpha) \cdot \Delta y$. Откуда: $2\alpha \cdot \Delta y = (2+\alpha) \cdot \Delta y$ или $2\alpha = 2 + \alpha$; $\alpha = 2$.

Искомый центральный угол, при котором площадь сектора — наибольшая, равен двум радианам, т. е. приблизительно 114°. При этом, очевидно, длина дуги равна двум радиусам.

Упражнение. Читателю предлагается решить эту задачу, „не решая“, а воспользовавшись результатом решения задачи 2 этой главы.

Задача 9. Нормандское окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры заранее задан (равен L). Каковы должны быть размеры окна, чтобы его площадь была наибольшей [чтобы оно пропускало возможно больше света (черт. 29)]?



Черт. 29.

Решение. Обозначим основание прямоугольника через $2x$; его высоту через y. Заранее дан периметр:

$$2x + 2y + \pi x = L, \text{ или } (\pi + 2)x + 2y = L. \qquad (1)$$

Или приблизительно:

$$5{,}14x + 2y = L.$$

Если увеличить x на Δx, то придется y уменьшить на некоторое Δy. При этом (беря Δx и Δy по абсолютной величине) увеличение $5{,}14 \cdot \Delta x$ должно компенсироваться уменьшением на $2 \cdot \Delta y$, т. е. должно соблюдаться равенство:

$$5{,}14 \cdot \Delta x = 2 \cdot \Delta y;$$

[1] Читателю полезно будет выяснить, почему при рассмотрении обвода мы учитываем разницу между дугами AB и $A'B'$, а тут при нахождении площади этой разницей пренебрегаем.

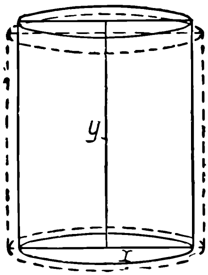
откуда:

$$\Delta y = \frac{5{,}14}{2}\Delta x = 2{,}57 \cdot \Delta x.$$

Это означает, что, например, увеличивая x на 1 *см*, мы должны уменьшить y на 2,57 *см*. Точнее:

$$(\pi + 2)\cdot \Delta x = 2\cdot \Delta y;\quad \Delta y = \frac{\pi + 2}{2}\cdot \Delta x \qquad (2)$$

Пусть сначала x мало по сравнению с y (как на чертеже). Даем x приращение Δx. Тогда по бокам получим приращения площади, равные каждое $y\cdot\Delta x$. Сверх этого появится добавочно полукольцо, площадь которого приблизительно равна длине полуокружности πx, умноженной на ширину кольца Δx, т. е. $\pi x\cdot\Delta x$ Все положительное приращение площади $\Delta S = 2y\cdot\Delta x + \pi x\cdot\Delta x$. Но одновременно мы вынуждены будем уменьшить высоту прямоугольника, поскольку периметр фигуры должен оставаться неизменным. Это влечет за собой отрицательное приращение, равное приблизительно $2x\cdot\Delta y$. Поэтому сопоставляются величины:



Черт. 30.

$$+\,2y\cdot\Delta x + \pi x\cdot\Delta x\ldots -2x\cdot\Delta y.$$

Отрицательное приращение можно, пользуясь соотношением (2), переписать так:

$$2x\cdot\Delta y = 2x\cdot\frac{1}{2}\,(\pi + 2)\cdot\Delta x = \pi x\cdot\Delta x + 2x\cdot\Delta x.$$

Поэтому сравним:

$$+\,2y\cdot\Delta x + \pi x\cdot\Delta x\ldots - (2x\cdot\Delta x + \pi x\cdot\Delta x).$$

Отнимая от обеих частей $\pi x\cdot\Delta x$ получим:

$$+\,2y\cdot\Delta x\ldots - 2x\cdot\Delta x.$$

Потребуем, чтобы имело место равенство:

$$2y\cdot\Delta x = 2x\cdot\Delta x,\ \text{или}\ y = x,$$

т. е. высота прямоугольника должна быть равна половине основания.

Задача 10. Требуется приготовить цилиндрическую кружку, открытую сверху, заданного объема V_1 так, чтобы при этом ушло минимум материала [т. е. чтобы поверхность была минимальной (черт. 30)].

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту через y. Объем его $\pi x^2 y$ должен оставаться равным постоянной величине V_1, боковая поверхность равна $2\pi xy$, площадь основания πx^2, поверхность кружки $2\pi xy + \pi x^2$, и эта величина должна быть минимальной.

Начинаем рассмотрение с тонкого и высокого цилиндра.

Пусть x получило приращение Δx; тогда высота y уменьшится на некоторую величину Δy. Найдем сперва связь между Δx и Δy при неизменном объеме. Увеличение радиуса основания дает дополнительный слой, облегающий вокруг цилиндра, равный по объему $2\pi x\cdot\Delta x\cdot y$ (считая y неизменным). Но одновременно придется уменьшить высоту цилиндра, и убавится верхний цилиндрический слой, по объему приблизительно равный $\pi x^2 \cdot \Delta y$ (пренебрегая увеличением x). Постоянство объема требует соблюдения равенства (по абсолютной величине):

$$2\pi x \cdot \Delta x \cdot y = \pi x^2 \cdot \Delta y$$

или

$$2y \cdot \Delta x = x \cdot \Delta y\,. \qquad (1)$$

В отличие от предыдущих задач здесь связь между приращениями Δx и Δy гораздо сложнее В этой задаче нельзя указать постоянного отношения между приращениями. Равенство (1) дает:

$$\Delta y : \Delta x = 2y : x, \qquad (2)$$

а это отношение само является переменным.

Перейдем к приращениям поверхности. При увеличении x положительное приращение поверхности слагается: 1) из добавочного кольца в основании цилиндра, равного $2\pi x \cdot \Delta x$, и 2) из увеличения боковой поверхности, равного:

$$2\pi(x+\Delta x)\cdot y - 2\pi x \cdot y = 2\pi xy + 2\pi \cdot \Delta x \cdot y - 2\pi xy = 2\pi \cdot \Delta x \cdot y.$$

Поэтому положительное приращение поверхности равно $2\pi x \cdot \Delta x + 2\pi y \cdot \Delta x$. С другой стороны, вследствие уменьшения высоты (образующей) цилиндра убавится каемка в верхней части цилиндра, поверхность которой равна $2\pi x \cdot \Delta y$ (пренебрегая увеличением x). Таким образом надо противопоставить приращения:

$$+2\pi x \cdot \Delta x + 2\pi y \cdot \Delta x \ldots - 2\pi x \cdot \Delta y,$$

или

$$+2\pi(x+y)\cdot \Delta x \ldots - 2\pi x \cdot \Delta y.$$

Мы исходили от тонкого и высокого цилиндра, т. е. такого, у которого x гораздо меньше, чем y. Если, например, $y = 4x$, то отрицательное приращение больше положительного; равенство (2) дает:

$$\Delta y = 8 \cdot \Delta x,$$

а потому отрицательное приращение:

$$2\pi x \cdot \Delta y = 2\pi \cdot x \cdot 8\Delta x$$

больше положительного:

$$2\pi(x+y)\cdot \Delta x = 2\pi \cdot 5 \cdot x \cdot \Delta x.$$

Но постепенно x растет, y убывает; отрицательные приращения уменьшаются, положительные увеличиваются. Согласно нашему приему, пишем уравнение:

$$2\pi(x+y)\cdot \Delta x = 2\pi x \cdot \Delta y,$$

или

$$(x+y)\cdot \Delta x = x \cdot \Delta y\,. \qquad (3)$$

Пользуясь соотношением (1), получим:

$$(x+y)\cdot \Delta x = 2y \cdot \Delta x;$$

откуда:

$$x + y = 2y; \; y = x,$$

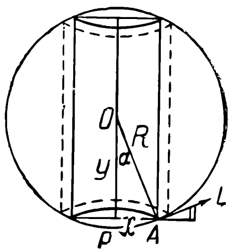
т. е. поверхность кружки будет минимальной в том случае, когда высота ее равна радиусу основания.

Упражнение. Решить задачу 10 в измененном виде. Какую форму следует придать закрытому цилиндру, чтобы объем его оказался наибольшим?

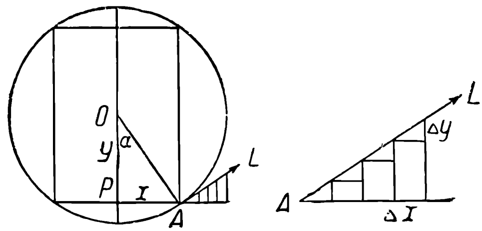
Полная поверхность цилиндра задана и равна S.

Задача 11. В шар требуется вписать цилиндр наибольшего объема (черт. 31).

Решение. Обозначим радиус шара OA через R; радиус основания цилиндра PA через x; половину высоты цилиндра OP через y; высота



Черт. 31.



Черт. 32.

цилиндра $H = 2y$. Начнем рассмотрение с узкого и высокого цилиндра. Дадим x малое приращение Δx. Мы получим добавочный облегающий слой вокруг данного цилиндра, объем которого приблизительно равен:

$$2\pi x \cdot \Delta x \cdot H = 2\pi x \cdot \Delta x \cdot 2y$$

(пренебрегая одновременным уменьшением высоты). С другой стороны, при увеличении x высота $H = 2y$ должна уменьшиться, а это влечет за собой снятие двух цилиндрических слоев сверху и снизу, объем которых вместе равен $2\pi x^2 \cdot \Delta y$ (здесь мы пренебрегли увеличением радиуса основания). Итак, приращения будут:

$$+ 4\pi xy \cdot \Delta x \; . \; . \; . -2\pi x^2 \cdot \Delta y.$$

Чтобы их можно было сравнить, надо еще учесть связь приращений Δx и Δy; эту связь в данной задаче найти труднее. Несомненно, точка A цилиндра обязана оставаться на поверхности шара. На добавочном черт. 32, где дано главное сечение всей фигуры, точка A должна скользить вдоль окружности. Но при малых приращениях Δx и Δy можно считать, что перемещение точки A совершается по касательной AL к окружности.

Примечание. Для целого ряда последовательных пар приращений Δx, Δy будем каждый раз заменять частицу криволинейного пути по дуге частицей прямолинейного по касательной. Это равносильно замене окружности описанным многоугольником, что позволительно при очень большом числе сторон многоугольника (при очень малых Δx).

Если угол $POA = \alpha$, тв угол между касательной AL и продолжением стороны PA также равен α. Беря Δx и Δy по абсолютному значению, будем иметь вдоль AL соотношение:

$$\Delta y : \Delta x = \operatorname{tg} \alpha$$

[так как вдоль прямой линии AL отношение $\Delta y : \Delta x$ остается постоянным (см. чертеж); мы же берем очень маленький отрезок прямой AL вблизи точки A].

Но из треугольника POA имеем: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$; откуда, окончательно:

$$\Delta y : \Delta x = x : y; \tag{1}$$

Δx и Δy взяты по абсолютной величине. Теперь мы можем вернуться к ранее полученным положительному и отрицательному приращениям объема вписанного цилиндра. Мы имели:

$$+ 4\pi xy \cdot \Delta x \ \ . \ . \ . \ - 2\pi x^2 \cdot \Delta y.$$

Можно было бы выразить Δy через Δx из формулы (1) и подставить во второе приращение, но проще будет переписать (1) в виде:

$$x \cdot \Delta x = y \cdot \Delta y.$$

Заменив в первом приращении $x \cdot \Delta x$ через $y \cdot \Delta y$, получим:

$$+ 4\pi y \cdot y \cdot \Delta y \ \ . \ . \ . \ - 2\pi x^2 \cdot \Delta y.$$

Приравнивая их, найдем:

$$4\pi y^2 \cdot \Delta y = 2\pi x^2 \cdot \Delta y;$$

откуда

$$2y^2 = x^2,$$

или

$$y^2 : x^2 = 1 : 2; \ y : x = 1 : \sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y} = \sqrt{2} = 1{,}414.$$

Этот угол определяет форму вписанного цилиндра.

Задача 12. В шар вписать конус наибольшего объема (на черт. 33 изображено сечение конуса и шара вертикальной плоскостью).

Решение. Обозначим радиус шара через R, радиус основания конуса через x; длину OP через y; высота конуса $H = R + y$.

Даем x приращение Δx. Тогда (считая H неизменной) получим добавочный объем, облегающий наш конус и равный по величине

$$\pi (x + \Delta x)^2 \cdot \frac{1}{3} H - \pi x^2 \cdot \frac{1}{3} H \approx 2\pi x \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{3} H$$

это будет положительное приращение.

Но увеличение x влечет за собой уменьшение высоты H, т. е. ее переменной части y.

Считая теперь x постоянным, дадим y (отрицательное) приращение Δy; это действие равносильно перемещению основания конуса на высоту, равную Δy. Вследствие этого получится отрицательное приращение, равное:

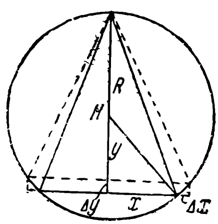
$$\pi x^2 \cdot \frac{1}{3} H - \pi x^2 \cdot \frac{1}{3} (H - \Delta y) = \frac{1}{3} \pi x^2 \Delta y.$$[1]

Таким образом мы должны сравнивать приращения:

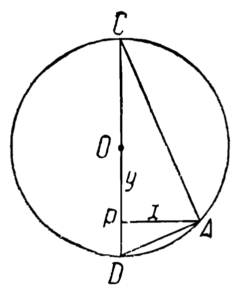
$$+2\pi x \cdot \Delta x \cdot \frac{1}{3} H \quad . \; . \; . \quad - \pi x^2 \cdot \frac{1}{3} \Delta y.$$

Что касается связи между приращениями Δx и Δy, то здесь, так же как в предыдущей задаче, точка A должна скользить вдоль окружности, и связь попрежнему дается уравнением:

$$\Delta y : \Delta x = x : y, \text{ или } x \cdot \Delta x = y \cdot \Delta y. \qquad (1)$$



Черт. 33



Черт. 34.

Заменяя в положительном приращении $x \cdot \Delta x$ через $y \cdot \Delta y$, получим:

$$+2\pi y \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{3} H \quad . \; . \; . \quad - \pi x^2 \cdot \frac{1}{3} \Delta y.$$

[1] Здесь может появиться сомнение следующего рода. Ведь снимается снизу в точности цилиндрический слой, равный по объему $\pi x^2 \cdot \Delta y$. Почему же мы отрицательное приращение взяли равным $\pi x^2 \cdot \frac{1}{3} \Delta y$ (т. е. в три раза меньше)? Объяснение следующее. Мы здесь учитываем отрицательное приращение при изменении высоты, но неизменном основании. Если приподнять круг, лежащий в основании конуса, на высоту Δy, то действительно убавится цилиндрический слой (о котором сейчас говорилось), но вместе с тем увеличится угол при вершине конуса между высотой и образующей (так называемый телесный угол), и появится дополнительный слой в виде зонтика, облегающий основной конус, хотя x не увеличилось.

По нашему способу пишем уравнение:

$$2\pi y \cdot \Delta y \cdot \frac{1}{3}(R+y) = \pi x^2 \cdot \frac{1}{3}\Delta y.$$

Отсюда следует:

$$2y(R+y) = x^2.$$

Чтобы выявить геометрический смысл найденного условия максимума, проще всего воспользоваться равенством:

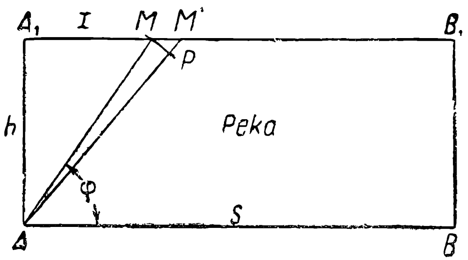
$$x^2 = (R+y)(R-y),$$

так как $AP^2 = CP \cdot PD$ (см. черт. 34). Но тогда будем иметь:

$$2y(R+y) = (R+y)(R-y);\ 2y = R - y;\ 3y = R;\ y = \frac{1}{3}R.$$

Высота конуса $H = \frac{4}{3}R$.

Задача 13 (черт. 35). Требуется в кратчайший срок перейти из пункта A в пункт B_1, расположенный по другую сторону реки. Для переправы можно



Черт. 35.

воспользоваться лодкой, скорость которой относится к скорости пробега по суше, как $k:1$ (например $k = \frac{3}{4}$). К какому пункту M направить лодку, чтобы дойти до требуемого пункта B_1 в минимальное время (длина s гораздо больше, чем h)?

Решение. С одной стороны, желая сократить время, мы стараемся укоротить путь и взять точку M правее (чем больше гипотенуза AM, тем больше разность $AA_1 + A_1M - AM$); с другой стороны, выбрать весьма длинный путь AM по реке мы не можем, так как скорость движения по реке меньше, чем по суше.

Обозначим угол MAB через φ и отрезок A_1M через x.

Мы допустим, что при малом $A_1M = x$ имеет смысл заменить путь AA_1B_1 (AA_1 на лодке и A_1B_1 по суше) путем AMB_1 (AM на лодке и MB_1 по суше). Надо узнать, до какого x целесообразно производить такую замену? Даем x малое приращение Δx, т. е. путь по воде AM заменяем через AM'. При этом придется пройти лишний путь по воде, равный PM', зато сэкономится отрезок MM' пути по суше (MP — дуга, описанная из точки A радиусом AM). Обозначим скорость движения по суше через v; тогда скорость лодки равна kv. Весьма малый треугольник MPM' можно приближенно считать прямоугольным; угол MPM' близок к прямому (см. конец главы I).

Тогда

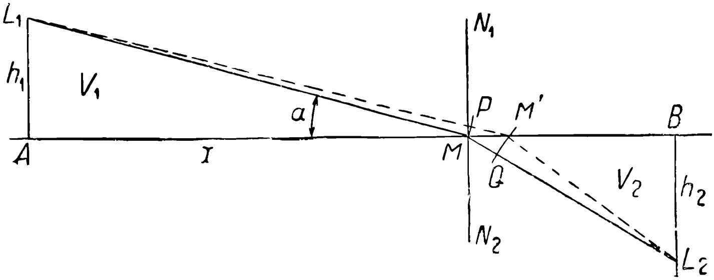
$$PM' = MM' \cdot \cos MM'P = \Delta x \cdot \cos(\varphi - \Delta\varphi) \approx \Delta x \cdot \cos\varphi.$$

[Угол $AMA_1 = \varphi$; угол при M' мало отличается от угла при M, и разность между $\cos(\varphi - \Delta\varphi)$ и $\cos\varphi$ есть величина I порядка малости, а после умножения на Δx дает величину II порядка малости.] Поэтому положительное приращение времени, затраченного на переезд через реку, равно $\frac{\Delta x \cdot \cos\varphi}{kv}$. Отрицательное приращение времени есть время, которое потребовалось бы для прохождения пути $MM' = \Delta x$ по суше. Оно равно $\frac{\Delta x}{v}$.

Итак, сравниваем приращения

$$+\frac{\Delta x \cdot \cos\varphi}{kv} \; . \; . \; . \; . \; . \; -\frac{\Delta x}{v}.$$

Сначала отрицательные приращения больше положительных, но по-



Черт. 36.

степенно разность между ними уменьшается (угол φ уменьшается, $\cos\varphi$ возрастает). Согласно нашему приему, пишем уравнение:

$$\frac{\Delta x \cdot \cos\varphi}{kv} = \frac{\Delta x}{v};$$

откуда

$$\frac{\cos\varphi}{k} = 1; \quad \cos\varphi = k.$$

Угол φ найдется из этого равенства. Искомое расстояние:

$$x = h \cdot \operatorname{ctg}\varphi = \frac{h \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{h \cdot k}{\sqrt{1-k^2}}.$$

Задача 14. Пусть луч света должен перейти из среды, расположенной над AB (черт. 36), в среду, расположенную под AB (из точки L_1 в точку L_2).

При этом скорость света в первой среде v_1, во второй — v_2. В какой точке M луч должен пересечь прямую AB, чтобы на переход из точки L_1 в точку L_2 ушло минимум времени?

Решение (ход решения такой же, как в предыдущей задаче). Пусть $v_1 > v_2$; обозначим AM через x.

Так как скорость в I среде больше, чем во II среде, то целесообразно увеличивать путь прохождения луча в I среде за счет пути во II среде. Исходя от некоторого x, будем давать ему приращения Δx (на чертеже MM'). При этом мы удлиним путь L_1M в I среде на отрезок PM' (MP — дуга, описанная из точки L_1 радиусом L_1M) и укоротим путь L_2M во II среде на отрезок MQ. Как и в предыдущей задаче, из малого треугольника MPM' имеем:

$$PM' = \Delta x \cdot \cos \alpha;$$

на прохождение этого добавочного пути в I среде понадобится время $\frac{\Delta x \cdot \cos \alpha}{v_1}$. Обозначим угол BML_2 через β. Рассуждая аналогично, найдем: путь во II среде укоротится на величину $\Delta x \cdot \cos \beta$, а экономия времени будет равна $\frac{\Delta x \cdot \cos \beta}{v_2}$. Итак, мы получили приращения:

$$+\frac{\Delta x \cdot \cos \alpha}{v_1} \ldots -\frac{\Delta x \cdot \cos \beta}{v_2}.$$

Сначала отрицательные приращения больше положительных; но постепенно при отодвигании M вправо угол β увеличивается, отрицательные приращения уменьшаются; угол α уменьшается, положительные приращения растут, т. е. при перемещении M вправо постепенно „экономия времени" становится менее ощутительной. Для нахождения минимума пишем уравнение:

$$\frac{\Delta x \cdot \cos \alpha}{v_1} = \frac{\Delta x \cdot \cos \beta}{v_2};$$

откуда

$$\cos \alpha : \cos \beta = v_1 : v_2.$$

Возьмем углы, дополнительные к углам α и β. Угол L_1MN называется углом падения; обозначим его через φ_1; аналогично для II среды обозначим угол L_2MN_2 через φ_2, тогда:

$$\cos \alpha = \sin \varphi_1; \ \cos \beta = \sin \varphi_2.$$

Теперь условие для минимума перепишется так:

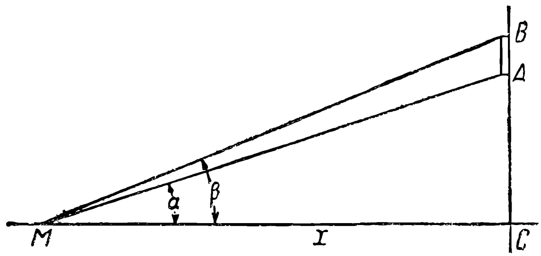
$$\sin \varphi_1 : \sin \varphi_2 = v_1 : v_2.$$

Эта формула выражает закон преломления света в физике (закон Снеллиуса).

Эта задача была решена Ферма.

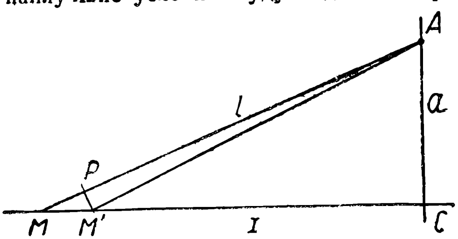
Задача 15. На стене висит плакат AB. Глаз наблюдателя находится в точке M. MC — горизонтальная линия. Расстояние $CA = a$; $CB = b$. Пусть высота плаката $b - a = h$. Где нужно стать наблюдателю, чтобы видеть плакат AB под наибольшим углом, т. е. чтобы угол $AMB = \varphi$ был возможно больше? (черт. 37; см. задачу 6 главы I).

Решение. Обозначим переменное расстояние CM через x. Если стать весьма далеко от стены, то плакат будет казаться малым, т. е. угол φ будет мал. По мере приближения к стене этот угол φ увеличи-



Черт. 37.

вается. Однако весьма близко подойти мы не можем, так как в этом случае плакат будет казаться сплющенным (скошенный вид). Очевидно, наилучшие условия будут где-то посредине. Исходя от большого x, будем давать ему отрицательные приращения Δx (приближаться к стене). Пусть мы перешли из точки M в точку M' (черт. 38) При этом происходит увеличение угла AMC Пусть угол $AMC = \alpha$; угол $AM'C = = \alpha + \Delta\alpha$. Разность между ними равна углу $MAM' = \Delta\alpha$. Связь между $\Delta\alpha$ и Δx нами найдена и подробно объяснена в



Черт. 38.

конце главы I. Поэтому мы здесь укажем ее вкратце. Обозначим AM через l; тогда дуга или хорда $PM' = (l - \Delta l) \cdot \Delta\alpha \approx l \cdot \Delta\alpha$. С другой стороны, из „прямоугольного треугольника“ MPM' (угол P почти прямой) имеем:

$$PM' = \Delta x \cdot \sin\alpha;$$

но

$$\sin\alpha = \frac{a}{l};$$

поэтому

$$PM' = \frac{\Delta x \cdot a}{l}.$$

Сравнивая эти два выражения для PM', получим:

$$\frac{\Delta x \cdot a}{l} = l \cdot \Delta\alpha;$$

откуда

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x \cdot a}{l^2} = \frac{\Delta x \cdot a}{x^2 + a^2}. \tag{1}$$

Таким образом при перемещении наблюдателя из M в M' на отрезок расстояния Δx слева направо угол α увеличивается на величину $\frac{a \cdot \Delta x}{x^2 + a^2}$. Одновременно с прямой MA будет смещаться прямая MB и увеличиваться угол β. Его приращение $\Delta\beta$ при отрицательном Δx получается аналогично:

$$\Delta\beta = \frac{b \cdot \Delta x}{x^2 + b^2}. \tag{2}$$

Дальше от читателя требуется сосредоточенное внимание, хотя рассуждение будет чисто арифметического характера.

Рассматриваемый нами угол φ равен:

$$\varphi = \beta - \alpha. \tag{3}$$

При изменении x будут одновременно изменяться и уменьшаемое β и вычитаемое α. Вопрос идет о том, какое приращение больше. При движении точки M слева направо (Δx отрицательное) оба приращения остаются положительными. Есть существенное отличие между случаем, когда x велико, и случаем, когда x мало.

Когда x велико, можно при сравнении приращений (1) и (2) слагаемые a^2 в знаменателе дроби (1) и b^2 в знаменателе (2) отбросить, и дробь (2) окажется больше (1), т. е. $\Delta\beta$ больше $\Delta\alpha$. Это означает, что уменьшаемое β растет быстрее, чем вычитаемое α, а потому угол $\varphi = \beta - \alpha$ будет возрастать.

Наоборот, когда x мало, дробь (1) близка к $\frac{\Delta x}{a}$, дробь (2) к $\frac{\Delta x}{b}$; тогда дробь (1) окажется больше (2), т. е. $\Delta\alpha$ больше $\Delta\beta$. Это означает, что вычитаемое растет быстрее уменьшаемого, угол φ будет убывать.

Условия для максимума — равенство приращений:

$$\frac{a \cdot \Delta x}{x^2 + a^2} = \frac{b \cdot \Delta x}{x^2 + b^2}; \quad \text{или} \quad \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{b}{x^2 + b^2}. \tag{4}$$

Решаем уравнение (4):

$$ax^2 + ab^2 = bx^2 + a^2b,$$

или

$$ab^2 - a^2b = bx^2 - ax^2; \; ab\,(b - a) = x^2\,(b - a);$$

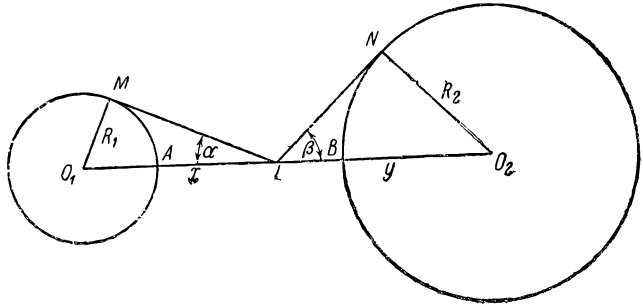
откуда

$$x^2 = ab; \; x = \sqrt{ab},$$

т. е. искомое расстояние x должно быть средним пропорциональным между величинами a и b.

Задача 16. Светящаяся точка помещена между двумя шарами радиусов R_1 и R_2 — на линии центров. Где ее поместить, чтобы сумма освещенных поверхностей на обоих шарах была наибольшей (черт. 39)?

Обозначим расстояния светящейся точки L от обоих центров через x и y, т. е. $LO_1 = x$; $LO_2 = y$. При этом на левом шаре освещается поверхность, равная шаровому сегменту, получаемому от вращения ду и MA около линии центров. Пусть LM есть касательная из точки L. Если точку L отодвинуть влево, то точка касания окажется правее, и на первом шаре освещенный шаровой сегмент уменьшится. Но одно-

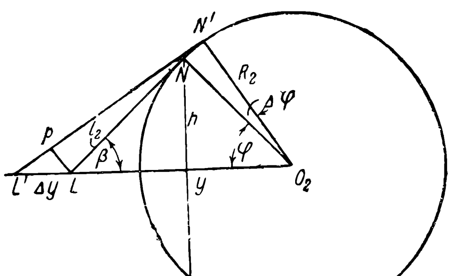


Черт. 39.

временно точка N на втором шаре окажется правее, и поверхность шарового сегмента, получаемого вращением дуги NB около линии центров, увеличится.

Вычислим сперва приращение ΔS, получаемое на втором шаре при сдвиге точки L влево на величину Δy (черт. 40). Так как сумма углов:

$$\angle \beta + \angle NO_2L = \beta + \varphi,$$



Черт. 40.

должна оставаться равной 90°, то уменьшение угла β равно увеличению угла NO_2L, а потому угол $NO_2N' = \Delta\varphi$ равен по абсолютной величине $\Delta\beta$. Заметим, кстати, что длина дуги NN' равна $R_2 \cdot \Delta\varphi$ (углы все в радианной мере), и что для весьма малых значений Δx, $\Delta\beta$, $\Delta\varphi$ можно перемещение NN' считать как бы прямолинейным. Обозначим длину LM через l_1; $LN = l_2$. Нам прежде всего надо найти длину малой дуги NN' в зависимости от Δy. Из малого „треугольника“ LPL' имеем (считая угол P прямым):

$$LP = \Delta y \cdot \sin\beta$$

(угол L' мало отличен от угла β). Но LP также равно $l_2 \Delta\varphi$; откуда

$$\Delta\varphi = \frac{LP}{l_2} = \frac{\Delta y \cdot \sin\beta}{l_2},$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\beta}{l_2} \cdot \Delta y. \qquad (1)$$

Дополнительный узкий сферический пояс, образуемый вращением дуги NN' около O_1O_2, можно приближенно принять за усеченный конус. Поверхность такого конуса вообще определяется формулой $2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot l_2$. Здесь мы ее приближенно выразим формулой $2\pi h \cdot l_2$, т. е. вместо среднего радиуса возьмем один из крайних, в данном случае h. Тогда поверхность кольца $\Delta S = 2\pi h \cdot R_1 \cdot \Delta\varphi$; но $h = l_2 \cdot \sin\alpha$; поэтому:

$$\Delta S = 2\pi l_2 \sin\beta \cdot R_2 \cdot \Delta\varphi. \qquad (2)$$

Подставляя значение $\Delta\varphi$ из формулы (1), мы получим отсюда:

$$\Delta S = 2\pi l_2 \cdot \sin\beta \cdot R_2 \cdot \frac{\sin\beta}{l_2} \cdot \Delta y,$$

или

$$\Delta S = 2\pi R_2 \cdot \sin^2\beta \cdot \Delta y. \qquad (3)$$

Вполне аналогично получится поверхность того сферического кольца, которое отнимется от освещаемой части левого шара:

$$\Delta S = 2\pi R_1 \cdot \sin^2\alpha \cdot \Delta x. \qquad (4)$$

Согласно нашему принципу, условие для максимума будет (здесь принято во внимание, что по абсолютной величине Δx и Δy равны):

$$2\pi R_1 \sin^2\alpha \cdot \Delta x = 2\pi R_2 \cdot \sin^2\beta \cdot \Delta x;$$

или

$$R_1 \sin^2\alpha = R_2 \cdot \sin^2\beta. \qquad (5)$$

Но $\sin\alpha = \frac{R_1}{x}$; $\sin\beta = \frac{R_2}{y}$; откуда (5) перепишется в виде: $\frac{R_1{}^3}{x^2} = \frac{R_2{}^3}{y^2}$; или $x^2 : y^2 = R_1{}^3 : R_2{}^3$; или $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$, или, наконец: $x : y = (R_1 : R_2)^{3/2}$.

ГЛАВА III.

СПОСОБ СРАВНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ТИПИЧНОЙ ЗАДАЧИ.

В задачах предыдущей главы мы искали максимум или минимум некоторой величины F, зависящей от двух переменных, причем эти переменные в своем изменении были стеснены добавочным условием. Например, в задаче 7 главы II (черт. 27) объем коробки зависел от высоты треугольника OF_1E_1 и ширины полоски между E_1F_1 и EF; этот объем пропорционален квадрату OP_1 и первой степени P_1P. Объем есть функция двух переменных. Но эти две переменные величины не свободны в своем изменении, а наоборот, тесно между собой связаны; увеличение одной влечет за собой уменьшение (на столько же) другой величины. Если $OP = a$; $PP_1 = x$, тогда $OP_1 = y = a - x$.

Итак, объем V будет включать в себе квадрат величины y и величину x в первой степени: $V = Cy^2x = C(a - x)^2x$, где C — означает постоянную величину. То же самое имеет место во многих других задачах (конечно, связь между обеими переменными может быть более сложного характера). Мы рассмотрим сейчас одну типичную задачу, к которой сводится решение ряда геометрических задач, в том числе и многих, решенных нами выше.

Пусть величина F может быть представлена в виде произведения степеней x и y, т. е. $F = x^m \cdot y^n$, например, $F = x^2y$ или $F = x^3y^2$, или $F = \frac{x^2}{y} = x^2y^{-1}$, или $F = \frac{x^2}{y^3} = x^2y^{-3}$, причем переменные x и y связаны между собой уравнением $x+y=a$ (где a — постоянное число). Если теперь мы решим задачу нахождения максимума-минимума для такой функции $F=x^m y^n$ при добавочном условии $x+y=a$ [1], то результатом решения можно будет воспользоваться для целого ряда задач[2]. Переходим к решению типичной задачи. Начнем с частных случаев.

Пример 1. Дана сумма двух переменных $x+y=a$ (например, $x+y=30$) и выражение $F=x^2y$. При каких значениях переменных это произведение F достигает максимума?

Решение. Нетрудно видеть, что, взяв x меньше или равным y, мы не будем иметь максимума (так как x здесь в квадрате, а y только в первой степени). Перейдем к учету приращений, т. е., начиная от небольшого значения x, будем придавать ему последовательно небольшие приращения Δx. При этом, очевидно, y будет каждый раз получать отрицательное приращение Δy (по абсолютной величине равное Δx). Переходя от x к $x+\Delta x$, мы (при неизменном y) вместо значения $F=x^2y$ получим новое значение $(x+\Delta x)^2 \cdot y$. Поэтому положительное приращение равно разности:

$$(x+\Delta x)^2 \cdot y - x^2y = y\,[(x+\Delta x)^2 - x^2] \approx y \cdot 2x \cdot \Delta x.$$

Аналогично, переходя от y к $y-\Delta y$, мы вместо $F=x^2y$ получим новое значение F, меньшее основного и равное $x^2(y-\Delta y)$. Разность между ними равна

$$x^2y - x^2(y-\Delta y) = x^2 \cdot \Delta y.$$

Поэтому надо противопоставить приращения:

$$+2xy \cdot \Delta x \;\ldots\; -x^2 \cdot \Delta y,$$

или

$$+2y \cdot \Delta x \;\ldots\; -x \cdot \Delta y.$$

Если x, начиная от малых значений, будет увеличиваться, то пока оно будет меньше, чем $2y$, до тех пор будет перевешивать положительное приращение. Когда же x

---

[1] Эту задачу мы сумеем решить, пользуясь методом малых приращений.

[2] То-есть можно будет решать их по готовому образцу. Таким образом способ, даваемый в этой главе, опирается на метод предыдущей главы.

станет больше, чем $2y$, то перевесит отрицательное приращение. Как мы хорошо знаем из предыдущей главы, мы получим условие для максимума, если приравняем эти приращения:

$$2xy \cdot \Delta x = x^2 \cdot \Delta y.$$

Но по абсолютной величине $\Delta y = \Delta x$. Поэтому должно быть:

$$2xy = x^2; \; 2y = x.$$

Мы получаем максимум, при соблюдении пропорции:

$$x_0 : y_0 = 2 : 1\ [1].$$

Если сумма $x + y = 30$, то $x_0 = 20$; $y_0 = 10$.

Пример 2. Дана сумма переменных $x + y = a$ (например $x + y = 50$) и выражение $F = x^2y^3$. Найти, при каких значениях переменных произведение F достигает максимума?

Решение. Здесь показатель степени при y больше, чем при x, поэтому естественно ожидать, что максимум достигается при некоторых значениях, когда y больше, чем x. Опять, исходя от небольшого значения x, будем давать x малые приращения Δx (им соответствуют равные по абсолютной величине отрицательные Δy).

При переходе от x к $x + \Delta x$ наше выражение $F = x^2y^3$ перейдет в такое: $(x + \Delta x)^2 y^3$; здесь y считается неизменным. Поэтому приращение (положительное)

$$\Delta F = (x + \Delta x)^2 y^3 - x^2 y^3 = y^3 [(x + \Delta x)^2 - x^2] \approx y^3 \cdot 2x \cdot \Delta x.$$

Точно так же, переходя от y к $y - \Delta y$, мы при неизменном x получим вместо $F = x^2y^3$ новое, меньшее значение: $x^2(y - \Delta y)^3$. Разность между ними дает отрицательное приращение:

$$x^2y^3 - x^2 (y - \Delta y)^3 = x^2 [y^3 - (y - \Delta y)^3] = x^2 [y^3 - y^3 + 3y^2 \cdot \Delta y - 3y \cdot (\Delta y)^2 + (\Delta y)^3] \approx x^2 \cdot 3y^2 \cdot \Delta y,$$

если отбросить величины II и III порядка малости. Итак,

---

[1] В дальнейшем будем те значения переменных x, y,..., при которых достигается максимум или минимум, обозначать через x_0, y_0,..., чтобы отметить их особенную роль.

надо противопоставить приращения:

$$+2x\cdot y^3\cdot\Delta x\ \ .\ \ .\ \ .\ x^2\cdot 3y^2\cdot\Delta y.$$

Условие для максимума получим, написав равенство:

$$2xy^3\cdot\Delta x=x^2\cdot 3y^2\cdot\Delta y;$$

или, учитывая, что по абсолютному значению $\Delta y=\Delta x$,

$$2xy^3=x^2\cdot 3y^2;$$

откуда

$$2y=3x;\ \text{или}\ x:y=2:3.$$

Окончательно:

$$x_0:y_0=2:3.$$

Из результатов решения этих двух задач читателю уже нетрудно догадаться, каково будет решение общей задачи. Перейдем теперь к общему случаю:

Основная задача. При заданной сумме $x+y=a$, найти максимум произведения $F=x^m y^n$.

Решение. Будем искать положительное приращение: вместо $x^m y^n$ получим $(x+\Delta x)^m y^n$; пользуясь формулой бинома Ньютона, будем иметь:

$$\Delta F=y^n\left[x^m+\frac{m}{1}x^{m-1}\cdot\Delta x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^{m-2}\cdot(\Delta x)^2+\ldots\right]-$$

$$-y^n x^m=y^n\left[m\cdot x^{m-1}\cdot\Delta x+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}\cdot(\Delta x)^2+\ldots\right];$$

отбрасывая малые величины II и высшего порядков, получим:

$$\Delta F\approx y^n m x^{m-1}\cdot\Delta x,$$

или

$$\Delta F\approx m x^{m-1}\cdot y^n\cdot\Delta x.$$

Аналогично для отрицательного приращения получим:

$$\Delta F\approx n\cdot x^m\cdot y^{n-1}\cdot\Delta y.$$

Надо противопоставить приращения

$$+m\cdot x^{m-1}y^n\cdot\Delta x\ \ .\ \ .\ \ .\ n x^m y^{n-1}\cdot\Delta y.$$

Условием максимума (ввиду равенства $\Delta x=\Delta y$) будет

$$m x^{m-1}y^n=n x^m y^{n-1}.$$

Откуда, разделив на $x^{m-1}y^{n-1}$, получим: $my = nx$, или в виде пропорции:

$$x_0 : y_0 = m : n.$$

Вывод. *При заданной сумме переменных* $x + y = a$ *величина* $F = x^m y^n$ *достигает максимума при тех значениях* $x = x_0$ и $y = y_0$, *для которых выполняется пропорция*

$$x_0 : y_0 = m : n.$$

Следствие. Если $F = xy$ при $x + y = a$, то максимум будет при $x = y$. (Достаточно принять $m = 1$; $n = 1$.)

Если сумма двух переменных постоянна, то произведение их достигает максимума при равенстве их между собой. Этот результат мы уже встречали раньше. Здесь мы имеем возможность убедиться в преимуществе применения более общего метода; оно станет еще более наглядным для читателя при решении дальнейших задач настоящей главы, решение которых в предыдущих главах требовало гораздо большего труда. Заметим, что постоянный (положительный) множитель при F не меняет решения задачи. Например, если требуется найти максимум для функции $F = 8x^2y$ при условии $x + y = a$, то можно коэфициент вовсе не рассматривать, так как если из всех возможных значений для x, y какие-то два x_0, y_0 дают произведению x^2y наибольшее значение, то одновременно с этим $F = 8x_0^2y_0$ будет больше, чем $8x^2y$ при всяких других значениях переменных.

> Примечание. Ниже будут даны еще два типа таких задач, у которых одно из чисел m, n отрицательно; при этом не сумма, а разность переменных постоянна.

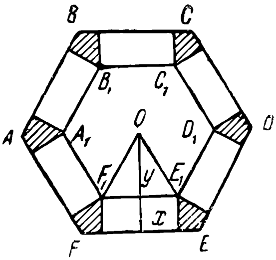
Перейдем теперь к решению задач.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СПОСОБОМ СРАВНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ.

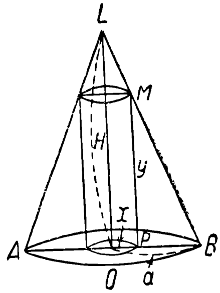
Задача 1 (см. задачу 7 главы II). Из пластинки жести в форме правильного многоугольника $ABCDEF$ требуется, вырезав по углам маленькие (заштрихованные) четырехугольники и отогнув края вдоль периметра некоторого многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (подобного основному), построить коробку (черт. 41).

Какой ширины x должен быть отогнутый край, чтобы получилась коробка наибольшей емкости?

Решение. Как известно, площади подобных многоугольников относятся между собой, как квадраты сходственных сторон. Иными словами, площадь правильного многоугольника пропорциональна квадрату его стороны (или апофемы). В нашей задаче площадь S основания коробки $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ пропорциональна квадрату



Черт. 41.



Черт. 42.

высоты треугольника OF_1E_1, т. е. y^2. Поэтому можно принять площадь $S = Cy^2$, где C означает постоянную. Объем коробки V будет равен:

$$V = Sx = Cy^2x.$$

Так как сумма $y+x$ здесь постоянна, то решение пишем сразу:

$$x_0 : y_0 = 1 : 2,$$

откуда

$$x_0 = \frac{1}{3}q,$$

т. е. надо отогнуть край на одной трети апофемы.

Задача 2 (см. задачу 3 главы II). В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема (черт. 42).

Решение. Обозначим радиус основания конуса через a, высоту его через H, радиус основания вписанного цилиндра через x и высоту цилиндра через y.

Объем вписанного цилиндра

$$V = \pi x^2 y.$$

Но здесь, очевидно, x и y не произвольны, они связаны некоторой зависимостью, поскольку цилиндр должен оставаться вписанным в конус.

Из подобия треугольников LOB и MPB имеем пропорцию:

$$MP : PB = LO : OB;$$

или

$$y : (a-x) = H : a.$$

Откуда

$$y = \frac{(a-x) \cdot H}{a}. \qquad (1)$$

Теперь объем цилиндра можно, пользуясь (1), переписать так:

$$V = \pi x^2 y = \frac{\pi x^2 (a-x) \cdot H}{a}.$$

Удобнее будет придать полученному выражению такую форму:

$$V = \frac{\pi H}{a} \cdot x^2 (a-x). \qquad (2)$$

Этот объем должен принять наибольшее значение, и требуется узнать, при каком значении x это имеет место.

Как было указано выше, мы можем отбросить постоянный множитель $\frac{\pi H}{a}$; тем самым задача приводится к отысканию максимума выражения $F = x^2 (a-x)$, или $F = x^2 y$, где $y = a - x$; $x + y = a$.

Сразу пишем ответ на поставленную задачу:

$$x_0 : y_0 = 2 : 1;$$

а так как

$$x + y = a,$$

то

$$x = x_0 = \frac{2}{3} a,$$

т. е. радиус основания цилиндра должен быть равен $^2/_3$ радиуса основания конуса. Но тогда высота цилиндра равна $^1/_3$ высоты конуса.

Задача 3. В данный шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема (см. задачу 11 главы II, черт. 43).

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через x, половину его высоты через y. Тогда объем цилиндра

$$V=\pi x^2\cdot 2y.$$

Нетрудно видеть, что переменные x и y связаны зависимостью:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (1)$$

Чтобы не иметь дела с корнями, пользуясь соотношением (1), выразим значение x^2 через y и подставим в выражение для объема. Имеем:

$$x^2=R^2-y^2.$$

Откуда

$$V=\pi(R^2-y^2)\cdot 2y,$$

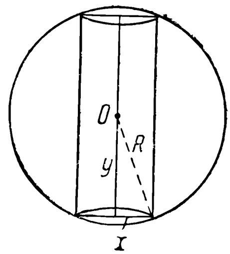
или

$$V=2\pi\cdot(R^2-y^2)y.$$

Итак, задача приводится к отысканию максимума для выражения

$$F=(R^2-y^2)\cdot y \qquad (2)$$

(если отбросить постоянный множитель 2π).



Черт. 43.

С первого взгляда кажется, что здесь наше правило неприменимо, так как в выражении (2) сумма множителей уже не постоянна. Но это затруднение можно устранить следующим образом (мы будем часто пользоваться этим приемом): вместо y пишем $(y^2)^{1/2}$. Тогда F перепишется так:

$$F=(R^2-y^2)\cdot(y^2)^{1/2}.$$

Сумма множителей R^2-y^2 и y^2 теперь постоянна:

$$(R^2-y^2)+y^2=R^2.$$

Но показатель степени у первого 1, у второго $^1/_2$. Не входя в теоретическое обоснование[1], укажем, что основ-

[1] Приводя дробные показатели m и n в выражении $F=x^my^n$ к общему знаменателю r и отбрасывая его, мы возвышаем F в степень r; если при $x=x_0$, $y=y_0$ функция F достигает максимума, то то же имеет место для функции $[F]^r$.

ная задача сохраняет свое решение и при дробных значениях показателей m и n. В данном случае у первого множителя (R^2-y^2) показатель вдвое больше, чем у второго (y^2). Поэтому наше правило требует соблюдения пропорции:

$$(R^2-y^2):y^2=2:1.$$

Откуда

$$R^2-y^2=2y^2;\ 3y^2=R^2;$$

$$y=y_0=\frac{R}{\sqrt{3}};$$

$$x=x_0=R\sqrt{\frac{2}{3}};$$

высота цилиндра

$$H=2y=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Второй вариант. Если из соотношения (1) найти y, то получим:

$$y=\sqrt{R^2-x^2};$$

тогда объем цилиндра

$$V=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Пользуясь дробными показателями, напишем:

$$V=2\pi x^2(R^2-x^2)^{1/2}.$$

Отбрасываем постоянный множитель:

$$F=(x^2)^1(R^2-x^2)^{1/2}.$$

Сумма множителей постоянна; поэтому решение будет:

$$x^2:(R^2-x^2)=2:1;\ 3x^2=2R^2.$$

$$x=x_0=R\sqrt{\frac{2}{3}},$$

как и раньше.

До сих пор мы рассматривали только случай максимума; показатели m и n переменных были положительными. Можно указать еще два типа задач, где один из показателей отрицательный; при этом не сумма, а разность переменных постоянна. Будем считать x, y положительными.

1) Найти крайнее значение (т. е. максимум или минимум) произведения $y^m x^{-n}$, т. е. дроби $\frac{y^m}{x^n}$, при $m > n$; переменные x и y связаны зависимостью $y-x=a$ (постоянной). Числитель больше, чем знаменатель, и степень его выше. Ниже увидим, что в этом случае получается минимум.

2) $F=y^m x^{-n} = \frac{y^m}{x^n}$; где $m<n$; $x-y=a$ (постоянной). Числитель меньше, чем знаменатель, и степень его ниже. В этом случае получается максимум.

В обоих случаях решение дается пропорцией: $x_0:y_0=m:n$.

Рассмотрим первый случай.

Для простоты берем частное значение показателей, например, дробь

$$y^3 x^{-2} = \frac{y^3}{x^2} = \frac{(x+a)^3}{x^2}.$$

При возрастании x числитель и знаменатель растут одновременно. Покажем сперва, что в этом случае имеется минимум. При весьма больших значениях x дробь наверное велика $\left(\frac{(x+a)^2}{x^2} > 1; x+a \text{ велико}\right)$. При малых значениях x числитель во всяком случае больше a^3, знаменатель мал, дробь велика. Так как дробь получает большие значения при малом x и при весьма большом x, то естественно ожидать, что при некотором среднем значении $x=x_0$ дробь принимает минимальное значение (заметим, что при $x=a$ дробь равна $8a$).

Эти соображения носят отчасти гадательный характер. Ведь дробь может совершать ряд колебаний от максимума к минимуму, и обратно. Только диференциальное исчисление дает определенный путь к исследованию вопроса во всей полноте и каждой задачи во всех ее деталях.

Перейдем теперь к вопросу, как найти этот минимум, т. е. при каком значении x этот минимум достигается. Берем дробь опять в виде

$$F=\frac{y^3}{x^2}.$$

Даем x малое приращение Δx; тогда и y получит такое же приращение (так как $y=x+a$, то если x перейдет в $x+\Delta x$, y перейдет в $x+a+\Delta x$). В отличие от всех предыдущих задач, здесь впервые Δx и Δy равны и по абсолютной величине и по знаку. Рассмотрим приращения (положительные и отрицательные), получаемые дробью. При положительном приращении Δy дробь растет. Увеличение дроби равно:

$$\frac{(y+\Delta y)^3}{x^2}-\frac{y^3}{x^2}\approx\frac{3y^2\cdot\Delta y}{x^2}.$$

При положительном приращении Δx дробь убывает. При этом уменьшение дроби равно

$$\frac{y^3}{x^2}-\frac{y^3}{(x+\Delta x)^2}=y^3\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+\Delta x)^2}\right]\approx y^3\cdot\frac{2x\cdot\Delta x}{x^4}=$$

$$=\frac{2y^3}{x^3}\cdot\Delta x.$$

Поэтому надо противопоставить приращения:

$$+\frac{3y^2\cdot\Delta y}{x^2}\quad\ldots\quad-\frac{2y^3}{x^3}\cdot\Delta x.$$

Минимум получается при условии:

$$\frac{3y^2\cdot\Delta y}{x^2}=\frac{2y^3}{x^3}\cdot\Delta x,$$

ввиду равенства: $\Delta y=\Delta x$ имеем:

$$\frac{3y^2}{x^2}=\frac{2y^3}{x^3},$$

откуда

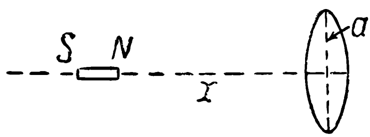
$$3x^3y^2=2x^2y^3;\ 3x=2y;\ x_0:y_0=2:3.$$

Мы получили решение такое же, как раньше.

Второй случай приводится к первому.

Если дробь $\frac{y^3}{x^2}$, где $y > x$, принимает минимальное значение, то обратная дробь $\frac{x^2}{y^3}$, где числитель меньше знаменателя и степень его ниже, очевидно, принимает максимальное значение. (Всюду x, y считаются положительными.) Приведем в качестве примера задачу из физики.

Задача. Если небольшой магнит расположен вдоль оси кругового электрического тока (витка), то последний действует на магнит с силой, пропорциональной выражению: $\frac{x}{(x^2+a^2)^{5/2}}$, где a — радиус тока, x — расстояние магнита от плоскости тока (черт. 44). При каком расстоянии x сила будет наибольшей?



Черт. 44.

Решение. Перепишем указанное в задаче выражение в ином виде: $\frac{(x^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^{5/2}}$. Здесь разность переменных (x^2) и (x^2+a^2) есть величина постоянная. Знаменатель больше числителя, и показатель при нем больше. Это — второй случай, и он дает максимум. Обратная дробь $\frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{(x^2)^{1/2}}$ давала бы минимум. Чтобы найти условия для максимума, пишем пропорцию:

$$(x^2+a^2):x^2=5:1;$$

откуда:

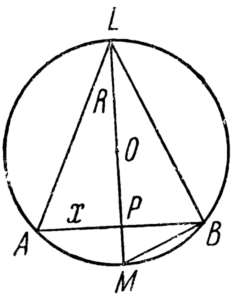
$$x^2+a^2=5x^2;\ 4x^2=a^2;\ x=x_0=\frac{a}{2}.$$

Задача 4. В шар данного радиуса R вписать конус наибольшего объема (см. задачу 12 главы II, черт. 45).

Решение Обозначим высоту конуса через y, радиус основания через x. Тогда объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Чтобы привести это выражение к одному переменному (x или y), проще всего будет рассмотреть главное сечение фигуры (плоскостью, проходящей через ось конуса) и воспользоваться теоремой о квадрате высоты в прямоугольном треугольнике. Из чертежа имеем:



Черт. 45.

$$BP^2=LP\cdot PM;$$

или

$$x^2=y(2R-y).$$

Подставляя это значение x^2 в выражение объема, получим:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot y(2R-y)\cdot y=\frac{1}{3}\pi y^2(2R-y).$$

Отбрасывая постоянный множитель $\frac{1}{3}\pi$, получаем выражение:

$$F=y^2(2R-y).$$

Сумма множителей (без показателей) y и $2R-y$ постоянна. Поэтому можно применить наше правило.

Для максимума требуется соблюдение пропорции:

$$y:(2R-y)=2:1.$$

Откуда

$$y=4R-2y;\quad y=y_0=\frac{4}{3}R.$$

Задача 5. Из всех треугольников с заданным периметром $a+b+c=2p$ найти такой, который вращением около одной из своих сторон производит тело наибольшего объема (черт. 46).

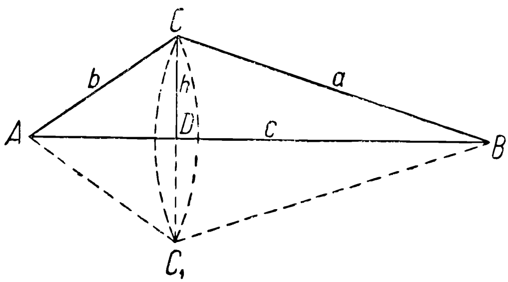
Решение. Предварительно докажем следующее.

Лемма. Если дана длина стороны c, вокруг которой происходит вращение, то наибольший объем получится при условии равенства двух других сторон: $a=b$.

Доказательство. Обозначим высоту CD через h. Объем тела вращения:

$$V=\pi(CD)^2\cdot\frac{1}{3}AD+\pi(CD)^2\cdot\frac{1}{3}DB=\pi(CD)^2\cdot\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}\pi h^2c;$$

но длина c, по условию леммы, заранее дана. Поэтому максимум объема получится при наибольшем значении высоты h, и доказательство леммы приводится к задаче: при заданной сумме двух сторон треугольника $a+b=2p-c=\text{const}$ найти условие, при котором высота будет максимальной, Так как при наибольшей высоте h (основание c—постоянно) и площадь треугольника окажется наибольшей, то предыдущую задачу заменим такой:



Черт. 46.

При заданной сумме двух сторон треугольника AC и CB найти условие того, чтобы площадь его была максимальной. Для площади треугольника имеем формулу Герона:

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-c)}$$

(стороны $a = x$ и $b = y$ неизвестны).

Для того чтобы S была максимальной, подкоренное выражение:

$$p(p-x)(p-y)(p-c) = p(p-c)\ \ (p-x)(p-y)$$

должно быть максимальным. Постоянный множитель $p(p-c)$ можно отбросить. Итак, ищем условие того, чтобы произведение $(p-x)(p-y)$ было максимальным.

Но сумма этих множителей постоянна, так как

$$(p-x)+(p-y) = 2p-(x+y) = \text{const}.$$

Как мы знаем (см. следствие основного вывода при $m = n = 1$), этот максимум достигается при равенстве обоих множителей. Итак, должно быть:

$$p - x = p - y.$$

Откуда:

$$x = y, \text{ или } a = b.$$

Треугольник должен быть равнобедренным. Лемма доказана.

Переходим к решению задачи.

По условию дан только периметр $a + b + c = 2p$. Ни одна из сторон не дана. Но лемма утверждает, что если выбрана сторона, вокруг которой происходит вращение, то две другие стороны должны быть равными. Поэтому, какова бы ни была длина стороны AB, все равно

$AC = CB$ (черт 47). Обозначим длину $AC = CB = y$; длину AB через $2x$. Тогда $2y + 2x = 2p$ (периметр). Или:

$$x + y = p. \tag{1}$$

Объем тела вращения

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot 2x = \frac{2}{3}\pi h^2 x. \tag{2}$$

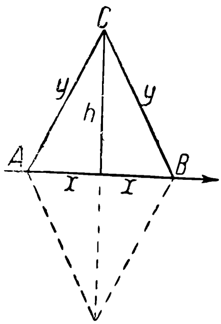
Но по теореме Пифагора

$$h^2 = y^2 - x^2.$$

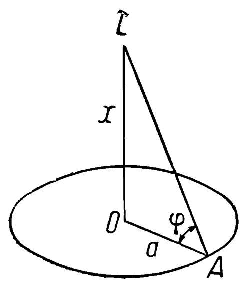
Поэтому объем

$$V = \frac{2}{3}\pi(y^2 - x^2)x.$$

Итак, мы ищем максимум выражения $x(y^2 - x^2)$ при добавочном условии (1).



Черт. 47.



Черт. 48.

Переходя к одному переменному, заменим y через $p - x$. Наше выражение примет вид:

$$x(y^2 - x^2) = x(p^2 - 2px + x^2 - x^2) = x(p^2 - 2px) = p \cdot x(p - 2x) =$$

$$2p \cdot x\left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Отбрасывая множитель $2p$, отыскиваем максимум выражения

$$F = x\left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Сумма множителей постоянна: $x + \left(\frac{p}{2} - x\right) = \text{const}.$

Максимум будет при равенстве множителей:

$$x = \frac{p}{2} - x; \quad 2x = \frac{p}{2}.$$

Основание треугольника должно быть равно $\frac{p}{2}$. Весь периметр равен $2p$. Поэтому каждая из боковых сторон равна $\frac{3}{4}p$. Итак, стороны искомого треугольника будут:

$$\frac{3}{4}p;\quad \frac{3}{4}p;\quad \frac{1}{2}p \qquad \left(AC = CB = \frac{3}{4}p;\quad AB = \frac{1}{2}p \right)$$

Из всех треугольников с периметром $2p$ именно такой дает при вращении около стороны $\frac{1}{2}p$ наибольший объем.

Задача 6. Электрическая лампочка висит над центром круглой площадки радиуса a (черт. 48). На какой высоте надо подвесить лампочку, чтобы освещение на краях площадки было максимальным?

Обозначения: $OA = a$; высота $OL = x$; угол $LAO = \varphi$.

Решение. Из физики известно, что сила освещения обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна синусу угла между лучами и плоскостью, на которую они падают.

В нашей задаче надо добиться наилучшей освещенности в точке на окружности, например, в точке A. Для этой точки будем иметь: сила освещения

$$f = \frac{k \cdot \sin\varphi}{(LA)^2},$$

где k — коэфициент пропорциональности.

Из чертежа следует:

$$(LA)^2 = x^2 + a^2;$$

$$\sin\varphi = \frac{x}{AL} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Тогда

$$f = \frac{k \cdot x}{\sqrt{x^2 + a^2}\,(x^2 + a^2)} = k \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Поэтому ищется максимум для

$$\frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{(x^2)^{1/2}}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Эта задача относится ко второму добавочному типу: числитель меньше знаменателя и степень его ниже.

Условие для максимума:

$$(x^2 + a^2) : x^2 = 3 : 1,$$

или

$$x^2 + a^2 = 3x^2;\quad 2x^2 = a^2;\quad x = x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Задача 7 (см. задачу 6 главы I; задачу 15 главы II). На стене висит плакат AB. Глаз наблюдателя M находится на горизонтальной линии CM. Расстояние $CA = a$; $CB = b$ (черт. 49). Где стать наблюдателю, чтобы видеть плакат AB под наибольшим углом, т. е. чтобы угол $AMB = \varphi$ был возможно большим?

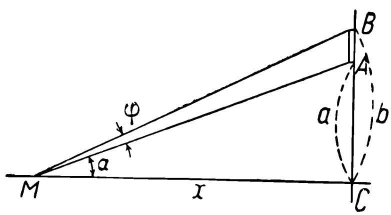
Решение. Мы будем рассматривать не самый угол φ, а его тангенс. Это позволительно, так как если из целого ряда значений углов φ (все острые) какое-нибудь $\varphi = \varphi_0$ окажется наибольшим, то из всех соответствующих значений $\operatorname{tg}\varphi$ значение $\operatorname{tg}\varphi_0$ также будет наибольшим.

Из чертежа следует:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{x},$$

но

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}.$$



Черт. 49.

Подставляя сюда значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}.$$

Задача приводится к отысканию максимума дроби

$$F = \frac{x}{x^2 + ab}$$

или

$$F = \frac{(x^2)^{1/2}}{(x^2 + ab)^1}.$$

Как и в предыдущей задаче, пишем условие для максимума:

$$(x^2 + ab) : x^2 = 2 : 1;\ \text{или}\ 2x^2 = x^2 + ab;\ x^2 = ab;\ x = x_0 = \sqrt{ab}.$$

Задача 8 (см. задачу 4 главы II). На плоскости даны две оси координат и точка K так, что $KB = a$; $KA = b$. Требуется из всевозможных прямых, проходящих через точку K, выбрать ту, которая отсекает треугольник MON минимальной площади (черт. 50).

Решение. Обозначим переменный угол KMO через φ. Из чертежа следует:

$$OM = a + b \cdot \operatorname{ctg}\varphi$$
$$ON = b + a \cdot \operatorname{tg}\varphi$$

Тогда площадь треугольника NOM равна:

$$\frac{1}{2}(a + b\operatorname{ctg}\varphi)(b + a\operatorname{tg}\varphi) = \frac{1}{2}(ab + b^2\operatorname{ctg}\varphi + a^2\operatorname{tg}\varphi + ab) =$$

$$= ab + \frac{1}{2}(b^2\operatorname{ctg}\varphi + a^2\operatorname{tg}\varphi).$$

Первое слагаемое постоянно. Надо искать минимум для выражения:

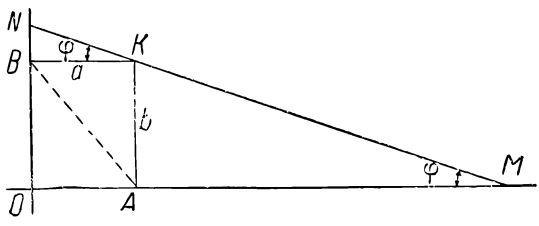
$$b^2 \operatorname{ctg} \varphi + a^2 \operatorname{tg} \varphi = F.$$

Чтобы перейти к алгебраическому виду, обозначим $\operatorname{tg} \varphi$ через z:

$$\operatorname{tg} \varphi = z; \ \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{z}.$$

Тогда F примет вид:

$$F = \frac{b^2}{z} + a^2 z = \frac{b^2 + a^2 z^2}{z}.$$



Черт. 50..

Прибегаем к искусственному приему:

$$F = \frac{b^2 + a^2 z^2}{(z^2)^{1/2}} = \frac{a^2\left(\frac{b^2}{a^2} + z^2\right)}{(z^2)^{1/2}}.$$

У переменных $\frac{b^2}{a^2} + z^2$ и z^2 разность постоянна.

Задача относится к первому дополнительному типу (числитель больше знаменателя и степень его выше). Для минимума должна выполнятся пропорция:

$$\left(\frac{b^2}{a^2} + z^2\right) : z^2 = 2:1;$$

откуда:

$$\frac{b^2}{a^2} + z^2 = 2z^2; \ z = z_0 = \frac{b}{a}.$$

При этом условии прямая MN должна быть параллельной диагонали AB.

Задача 9 (см. задачу 10 главы II). Требуется приготовить цилиндрическую кружку, открытую сверху, заданного объема V_1 так, чтобы при этом ушло минимум материала т. е. чтобы поверхность была минимальной (черт. 51)].

Решение. Обозначим радиус основания цилиндра через x, высоту его через y. Тогда объем $V = \pi x^2 y$.

По условию задачи объем заранее задан, т. е. $\pi x^2 y$ должно быть равно постоянной величине V_1:

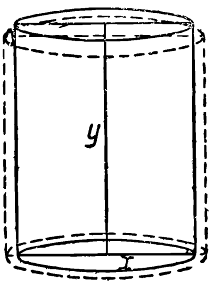
$$\pi x^2 y = V_1. \tag{1}$$

Боковая поверхность цилиндра равна $2\pi xy$; площадь основания πx^2. Поэтому поверхность кружки

$$S = \pi x^2 + 2\pi xy.$$

Чтобы иметь дело с одним переменным, мы из равенства (1) определим y и подставим в выражение для поверхности:

$$y = \frac{V_1}{\pi x^2};$$



Черт. 51.

тогда

$$S = \pi x^2 + 2\pi x \cdot \frac{V_1}{\pi x^2};$$

$$S = \pi x^2 + \frac{2V_1}{x}. \tag{2}$$

Искусственным путем преобразуем полученное выражение к нашему типу:

$$S = \frac{\pi x^3 + 2V_1}{x} = \pi\frac{x^3 + \frac{2V_1}{\pi}}{x},$$

или

$$S = \pi\frac{\left(x^3 + \frac{2V_1}{\pi}\right)}{(x^3)^{1/3}}.$$

Мы получили дробь первого дополнительного типа (разность числителя и знаменателя постоянна; числитель больше знаменателя и степень его выше; этот тип дает минимум).

Условие для минимума:

$$\left(x^3 + \frac{2V_1}{\pi}\right) : x^3 = 3 : 1;$$

откуда

$$3x^3 = x^3 + \frac{2V_1}{\pi};\ x = x_0 = \sqrt[3]{\frac{V_1}{\pi}}.$$

Если, пользуясь соотношением (1), найти соответствующее значение y_0, то окажется, что $y_0 = x_0$.

Высота кружки должна быть равна радиусу основания.

Задача 10. Из листа жести шириною a требуется согнуть открытый желоб так, чтобы поперечный разрез его имел форму трапеции, у которой стороны AB, BC, CD равны: $AB = BC = CD = \frac{1}{3}\,a$, и чтобы при этом вместимость желоба была наибольшей (черт. 52).

Решение. Чтобы определить форму трапеции, достаточно определить угол φ.

Высота трапеции $h = \frac{a}{3}\sin\varphi$.

Нижнее основание равно $\frac{a}{3}$. Верхнее основание равно $\frac{a}{3} + 2\frac{a}{3}\cos\varphi$. Полусумма оснований:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{2}{3}a\cos\varphi\right) = \frac{a}{3}\left(1 + \cos\varphi\right).$$

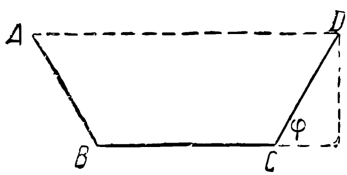
Площадь трапеции:

$$S = \frac{a}{3}\left(1 + \cos\varphi\right) \cdot \frac{a}{3}\sin\varphi = \frac{a^2}{9}\left(1 + \cos\varphi\right)\sin\varphi.$$

Спрашивается, какое значение надо придать углу φ, чтобы функция

$$F = (1 + \cos\varphi)\sin\varphi$$

достигла максимума?



Черт. 52.

Предс авим функцию в чисто алгебраическом виде. Обозначим переменное $\cos\varphi$ через z. Тогда

$$\cos\varphi = z;\ \sin\varphi = \sqrt{1 - z^2};$$

$$F = (1 + z)\sqrt{1 - z^2}.$$

Чтобы можно было воспользоваться нашим приемом, сделаем преобразование:

$$F = (1 + z)\sqrt{(1 + z)(1 - z)} = (1 + z)\sqrt{1 + z}\sqrt{1 - z} =$$

$$= (1 + z)^{\frac{3}{2}}(1 - z)^{\frac{1}{2}}.$$

Сумма обоих множителей (без показателей) постоянна:

$$(1 + z) + (1 - z) = 2 = \text{const}.$$

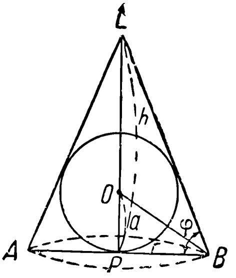
Для максимума получаем пропорцию:

$$(1 + z) : (1 - z) = 3 : 1.$$

Откуда $z = z_0 = \frac{1}{2}$. Итак, $\cos\varphi_0 = \frac{1}{2}$; угол $\varphi_0 = 60°$.

Задача 11. Около шара данного радиуса описать конус наименьшего объема (черт. 53).

Решение. Пусть радиус шара будет a. Радиус основания конуса обозначим через r и высоту его через h; угол между образующей и плоскостью основания конуса обозначим через φ. Тогда из прямоугольного треугольника OPB имеем:



Черт. 53.

$$PB = OP \cdot \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

т. е.

$$r = a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}.$$

Высота

$$LP = PB \cdot \operatorname{tg} \varphi;$$

$$h = r \operatorname{tg} \varphi = a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

или

$$V = \frac{1}{3} \pi a^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Итак, задача сводится к отысканию такого угла φ, при котором функция

$$F = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}^3 \frac{\varphi}{2}$$

принимает минимальное значение. Представим F в алгебраическом виде. С этой целью обозначим $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ через z. Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z; \ \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{z};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} 2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

Теперь рассматриваемая функция примет вид:

$$F = \frac{2z}{1 - z^2} \cdot \frac{1}{z^3} = \frac{2}{z^2 (1 - z^2)}.$$

Числитель—постоянная величина. Для того чтоба эта дробь достигла минимума, необходимо, чтобы знаменатель принял максимальное значение, т. е. $z^2(1 - z^2)$ или $(z^2)^1 (1 - z^2)^1$ должно быть максимальным. Сумма множителей (z^2) и $(1 - z^2)$ постоянна. Как мы знаем, максимум достигается при их равенстве. Отсюда получаем условие:

$$z^2 = 1 - z^2; \ 2z^2 = 1;$$

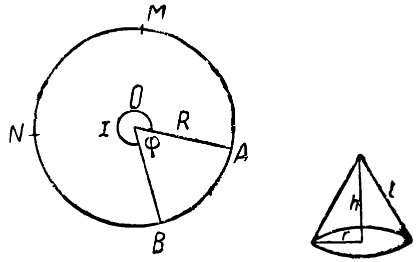
$$z = z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Угол $\varphi_0 \approx 35^\circ 16'$. Можно показать, что у такого конуса высота $h = 4a$.

Задача 12. Дан жестяной круг радиуса R. Требуется из него вырезать сектор так, чтобы коническая воронка, которую можно образовать, свертывая оставшуюся часть круга, была наибольшего объема (черт. 54).



Черт. 54.

Решение. Если вырезать сектор AOB и оставшуюся часть свернуть в виде конической воронки, то у полученного конуса длина окружности основания равна длине дуги $AMNB$, а образующая конуса будет равна радиусу круга R. Обозначим центральный угол AOB вырезаемого сектора через φ, а остающийся центральный угол, равный $360^\circ - \varphi$, или $2\pi - \varphi$, через x (в радианной мере), радиус основания конуса через r, высоту его через h и образующую через l. Длина дуги $AMNB$ равна Rx; $l = R$. Тогда должно соблюдаться равенство:

$$2\pi r = xR,$$

откуда

$$r = \frac{xR}{2\pi}. \tag{1}$$

Высота конуса

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{xR}{2\pi}\right)^2} = R\sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}\frac{x^2R^2}{4\pi^2}\cdot R\sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{\pi}{3}R^3\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{3}R^3\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{1/2}.$$

Итак, надо отыскать максимум произведения

$$\left(\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^1\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)^{1/2}.$$

Сумма множителей постоянна. Условие для максимума таково:

$$\frac{x^2}{4\pi^2} : \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) = 2 : 1;$$

откуда

$$\frac{x^2}{4\pi^2} = 2 - 2 \cdot \frac{x^2}{4\pi^2}; \quad \frac{3x^2}{4\pi^2} = 2;$$

$$x = x_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2\pi \sqrt{0,667}\,.$$

Надо вырезать угол $\varphi = 2\pi - x \approx 2\pi(1 - \sqrt{0,667}) \approx 0,38\pi$.

Заключение. Частный способ, изложенный в этой главе, хотя и ведет иногда быстро к цели, не может, однако, нас удовлетворить. Во-первых, его можно прилагать только к задачам определенного типа, во-вторых, приходится рассматриваемую в задаче функцию F искусственно приводить непременно к виду $x^m y^n$. Например, в задаче 10 мы встретили для площади трапеции формулу $\frac{a^2}{9}(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$ и вынуждены были преобразовать это выражение в произведение указанного вида. Кроме того, решение основной задачи основывалось на методе предыдущей главы, на методе малых приращений, так что принципиально опять-таки пришлось прибегать к приращениям. Однако удобство этого способа заключается в том, что он рассматривает функцию F целиком и приводит задачу к алгебраическим действиям.

Наиболее общий, универсальный метод, удовлетворяющий всем требованиям математической точности и весьма удобный для пользования, дается диференциальным исчислениям. С этим методом читатель познакомится в следующей главе.

ГЛАВА IV.

МЕТОД ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

1. ПЕРЕХОД ОТ ПРИРАЩЕНИЙ К ДИФЕРЕНЦИАЛАМ.

В главе II при решении задач методом малых приращений нам приходилось следить за процессом изменения некоторой величины F (основной переменной величины в задаче). Этот процесс изменения мы разбивали на мелкие доли, так как малые изменения ΔF легче поддаются учету. Знание этих малых приращений давало возможность найти тот момент процесса, когда величина F достигает максимума или минимума. Поэтому центральной задачей является — найти закономерность этих приращений, найти формулу для них.

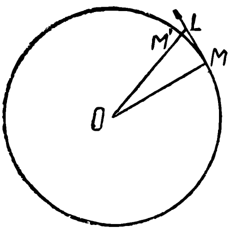
Однако метод, которым мы пользовались в главе II, не является общим. А именно, мы каждую отдельную задачу решали на основании геометрических соображений; приращения находились согласно особенностям той или иной геометрической фигуры, например, добавочный облегающий слой вокруг цилиндра, добавочный слой в виде зонтика вокруг конуса и т. д. Возникает вопрос: нельзя ли свести нахождение этих приращений к алгебраическим действиям? Кроме того, мы рассматривали отдельно положительные и отрицательные приращения. В этом нет необходимости, важно только знать: растет ли величина F или убывает, т. е. будет ли общее (суммарное) приращение положительным или отрицательным?

Метод, излагаемый в настоящей главе, свободен от этих недостатков. Он дает возможность по заданному алгебраическому (тригонометрическому) выражению величины F написать формулу ее мельчайших приращений, не касаясь вовсе геометрических свойств той или иной фигуры.

По формуле для приращений можно будет определить, растет ли величина F или убывает (и как быстро происходит ее изменение). А имея такой почти стандартный прием нахождения мельчайшего приращения, легко найти момент, когда F достигает максимума или минимума: достаточно будет формулу, выражающую приращение, приравнять нулю.

Отметим тут же две особенности этого метода.

Во-первых, при дроблении процесса изменения величины F переходят, выражаясь образно, от мелких долей к мельчайшим, дробление продолжают неограниченно далеко[1].



Черт. 55.

Во-вторых, формула составляется не для самих приращений, а для некоторых величин, мало отличных от приращений; эти величины более простого вида и легче поддаются исследованию.

Чтобы пояснить, как получаются эти своеобразные величины, дифференциалы, призванные заменить приращения, лучше всего будет обратиться к примерам.

Пример 1. Материальная точка вращается по окружности. Пусть в данный момент времени t она находится в точке M (черт. 55). Определить мельчайшее перемещение (т. е. перемещение за мельчайший промежуток времени Δt).

Материальная точка движется по окружности и за промежуток времени Δt переместится на малую дугу, например, MM'. С другой стороны, в данный момент времени материальная точка по инерции стремится двигаться прямолинейно, а именно: по касательной MT. Допустим теперь приближенно, что перемещением будет отрезок касательной ML, взятый до встречи с продолжением радиуса OM'. Такое допущение влечет за собой неточность. Однако, если представить себе, что промежуток Δt берется все меньше и меньше, то и допу-

[1] Выражаясь более точным языком теории пределов, приращения Δx и ΔF рассматриваются как переменные, стремящиеся к нулю.

скаемая неточность становится почти неощутимой. Мы видели в главе I, что если отрезок касательной ML и дуга MM' будут малыми величинами I порядка, то разность между ними будет величиной III порядка малости. Например, если ML и дуга MM' будут измеряться в сотых долях, то разность между ними—в миллионных долях; если ML и дуга MM' в тысячных долях, то разность между ними—в 10^{-9} долях и т. д.

Этой погрешностью (от замены дуги касательной) тем более можно пренебречь, если уже величину I порядка будем брать все меньшей и меньшей. Теоретически рассуждая, можно это уменьшение продолжать как угодно далеко, и тогда малые величины II и III порядка можно будет совершенно отбросить, малая дуга MM' и отрезок ML становятся неразличимыми, эквивалентными. Но даже при заметном расхождении дуги MM' и отрезка ML все же часто бывает удобно заменить криволинейный путь прямолинейным, как более простым. Дуга MM' есть фактическое перемещение; отрезок ML есть допускаемое нами прямолинейное перемещение, близкое к предыдущему. Малая дуга MM' и отрезок касательной ML могут служить примером: первая — приращения, второй — диференциала. Основная идея излагаемого метода заключается в замене приращения диференциалом [1].

Пример 2. Из физики известно, что при падении тела (пренебрегая сопротивлением воздуха и т. п.) движение можно считать равномерно-ускоренным. Ускорение $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}. Если начальная скорость равна нулю, то скорость v в любой момент определяется формулой $v=gt$ (t—время в секундах, протекшее от начала движения).

Предположим теперь, что от начала падения прошло 5 сек. По указанной формуле скорость тела при $t=5$ равна $g\cdot 5=9{,}81\cdot 5=49{,}05$ *м/сек*. Итак, в тот момент, когда секундомер покажет ровно 5 сек. от начала падения, скорость тела $v=49{,}05$ (обозначим ее через v_0). Значит ли это, что за следующую шестую секунду тело пройдет

[1] Для понятия диференциала не является обязательным условие, чтобы отрезок касательной был чрезвычайно малым. Существенно только, чтобы вблизи точки M отрезок MT возможно точнее отражал действительное перемещение по дуге; взять отрезок касательной значительным неудобно потому, что тогда расхождение его с дугой становится заметным.

расстояние, равное 49,05 *м*? Конечно, нет. Потому что в течение шестой секунды тело будет двигаться неравномерно, а именно ускоренно, и пройденный путь будет больше. Означает ли найденная скорость, что тело за время от $t=5$ сек. до $t=5^{1}/_{2}$ сек. пройдет $\frac{49,05}{2}$ *м*? Нет, и по той же причине. А пройдет ли тело за промежуток времени от $t=5$ до $t=5,1$ сек. расстояние, равное $\frac{49,05}{10}$ *м*? Нет, оно пройдет больше. И какой бы малый промежуток времени Δt ни взять, расстояние, пройденное телом от $t=5$ сек. до $t=5+\Delta t$ секунд не равно $v_0\Delta t$. Но в таком случае возникает вопрос: к чему же понадобилась тогда формула для скорости, если по ней нельзя высчитать пройденное расстояние?

Ответ следующий: найденная для момента $t=5$ сек. скорость есть мгновенная скорость. Если бы в это мгновение прекратилось действие силы тяготения, то по закону инерции тело продолжало бы равномерное движение с указанной скоростью. Если бы прекратилась сила тяготения?... разве это возможно? Не есть ли это оторванная от жизни абстракция?

Нет, оказывается, такое предположение осуществимо на практике. Английский физик Атвуд построил прибор, при помощи которого у равномерно-ускоренного движения можно искусственно в любой момент прекратить воздействие силы тяготения, и с этого момента тело движется равномерно (см. о машине Атвуда в учебниках физики). И хотя мгновенная скорость не дает точного ответа на вопрос о длине пройденного пути, она позволяет найти приближенное значение пути, пройденного за промежуток Δt:

$$\Delta s \approx v_0 \Delta t.$$

Чем меньше Δt, тем меньше отличается произведение $v_0 \cdot \Delta t$ от фактически проходимого пути. В самом деле, за малый промежуток Δt скорость v_0 успеет лишь мало измениться. Искомая величина пути Δs удовлетворяет неравенству:

$$v_0 \Delta t < \Delta s < (v_0 + \Delta v)\Delta t,$$

где Δv есть приращение скорости, и допускаемая погрешность меньше, чем $\Delta v \Delta t$, т. е. есть величина II порядка малости. Поэтому в основном при малом Δt произведение $v_0 \Delta t$ верно передает приращение пути. Это — путь, который был бы пройден телом, если бы оно, начиная от момента t, двигалось равномерно с мгновенной скоростью v_0. Эта величина $v_0 \Delta t$ называется **дифференциалом** пути. В отличие от приращения Δs она обозначается через ds. Для симметрии и приращение Δt обозначим через dt. Тогда

$$ds = v_0\, dt.$$

Диференциал пути пропорционален промежутку времени.

Пример 3. Пусть шар, наполненный газом, слегка расширился, его радиус R получил приращение ΔR. Найти приращение объема.

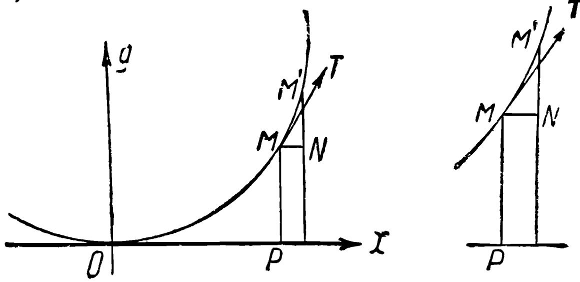
Такой пример мы уже рассматривали в главе I. Можно приближенно принять, что приращение объема равно поверхности шара, умноженной на толщину слоя. Но поверхность шара сама является величиной переменной. Если взять начальную поверхность, то получим для приращения объема $4\pi R^2 \cdot \Delta R$. Если взять поверхность после расширения, то получим $4\pi(R + \Delta R)^2 \cdot \Delta R$. Искомая величина заключается между ними:

$$4\pi R^2 \cdot \Delta R < \Delta V < 4\pi(R + \Delta R)^2 \cdot \Delta R.$$

В главе I мы указывали, что разность между крайними членами есть величина II и III порядка малости (считая ΔR I порядка), и поэтому крайние члены неравенства можно считать эквивалентными. Теперь мы подойдем к вопросу иначе. Рассмотрим самое начало процесса расширения. Трудность задачи в том, что поверхность шара сама изменяется. Но если взять мельчайший промежуток времени Δt, то поверхность еще „не успеет“ увеличиться. Пренебрегая этим ростом поверхности, т. е. фиктивно считая, что поверхность не изменяется, мы найдем объем добавочного слоя, умножая исходную поверхность $4\pi R^2$ на перемещение ΔR. Это допускаемое (не действительное) приращение объема, пропорциональное ΔR, называется диференциалом и записывается так:

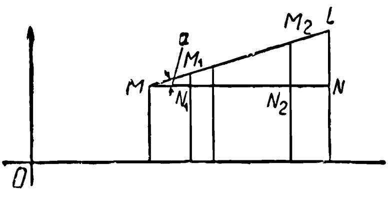
$$dV = 4\pi R^2\, dR.$$

Пример 4. Пусть имеется график функции $y = ax^2$, где a — постоянный коэфициент (эта кривая называется параболой). Требуется найти приращение ординаты точки M при небольшом перемещении ее по дуге MM' (черт. 56).



Черт. 56.

Напомним, что $OP = x$ называется абсциссой, $PM = y$ — ординатой точки M. При таком перемещении координаты точки изменятся и получат приращения Δx и Δy.



Черт. 57.

Как и в примере 1, заменим перемещение по малой дуге MM' некоторым перемещением по отрезку прямой, причем прямую надо выбрать таким образом, чтобы она наиболее тесно примыкала к кривой вблизи точки M (касательная прямая). Но при прямолинейном перемещении связь между приращениями Δx и Δy установить нетрудно. На добавочном чертеже (черт. 57) показан прямолинейный отрезок ML. Если перемещать точку по прямой ML, то будет сохраняться пропорция:

$$\frac{N_1M_1}{MN} = \frac{N_2M_2}{MN_2} = \ldots = \frac{NL}{MN} = k,$$

где k есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на прямой ML, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k = \operatorname{tg}\alpha, \text{ или } y = kx.$$

Точно так же на нашем чертеже для прямолинейного перемещения, исходящего из точки M, будем иметь пропорцию: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$. Вернемся теперь к перемещению по параболе; мы желаем его заменить более простым прямолинейным перемещением, удовлетворяющим условию вида $\Delta y = k \cdot \Delta x$, причем последнее должно как можно ближе подойти к фактическому перемещению по дуге. С этой целью обратимся к вычислениям. В точке M абсцисса равна x, ордината $y = ax^2$. В соседней точке M' абсцисса равна $x + \Delta x$, ордината $y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$. Поэтому приращение ординаты:

$$\Delta y = a\ (x + \Delta x)^2 - ax^2 = 2ax \cdot \Delta x + a\ (\Delta x)^2.$$

Перемещение по дуге можно будет заменить прямолинейным перемещением, если вторая точка на дуге M' будет близка к точке M, и чем M' будет ближе, тем погрешность при такой замене становится меньше. Поэтому будем считать, что приращение Δx приближается к нулю. Но тогда в выражении

$$\Delta y = 2ax \cdot \Delta x + a\,(\Delta x)^2$$

вторым слагаемым можно будет пренебречь. Далее, в рассматриваемой точке M абсцисса x имеет вполне определенное значение (обозначим его через x_0), и потому вблизи выбранной точки

$$\Delta y = 2ax_0 \cdot \Delta x + a\,(\Delta x)^2.$$

Теперь нетрудно придать этому приращению требуемый вид: $\Delta y = k\,\Delta x$. Для этого достаточно в выражении Δy отбросить второе слагаемое, тогда постоянным коэфициентом k окажется $2ax_0$. Геометрически это означает, что мы частицу дуги заменяем отрезком касательной. Это новое приращение, отличное от фактического, называется диференциалом ординаты:

$$dy = 2ax_0 \cdot dx.$$

Если перейти к другой точке, то там абсцисса x будет иметь уже другое значение, но рассуждение останется прежним, так что общей формулой будет:

$$dy = 2ax\,dx.$$

2. ЧТО ТАКОЕ ДИФЕРЕНЦИАЛ.

Во всех приведенных примерах мы фактический процесс изменения, в его мельчайших долях, заменяли более простым. В последнем примере сущность диференциала выступает наиболее выпукло, и мы можем сформулировать:

1) *Диференциал функции dF для малого приращения аргумента дает основную, главную часть действительного ее приращения ΔF; допускаемое отклонение есть величина высшего порядка малости.*

2) *У диференциала зависимость между приращением функции и приращением аргумента — простейшая: dF пропорционально $dx = \Delta x$* [1]*: $dF = k\Delta x$ (k — постоянный коэфициент).*

Приведем еще один пример. Если шофер на полном ходу машины, посмотрев на указатель, увидел там 60 *км/час*, то он естественно предположит, что за последующую минуту будет пройден 1 *км*; за $^1/_2$ мин.—500 *м*; за 6 сек.—50 *м*; за 3 сек.—25 *м*, и это дает ему ориентировку в том, чтобы не налететь на пешехода, чтобы затормозить и т. д. Шофер берет диференциал, умножая скорость на время, предполагая движение равномерным. Вообще говоря, фактически пройденное расстояние может отличаться от указанного, если, например, путь идет в гору или под гору, или если он успеет затормозить; но если промежуток времени Δt очень мал, путь ровный, мотор работает равномерно, и шофер не успеет принять никаких мер, то отличие приращения пути Δs от диференциала ds будет ничтожно.

Мы имеем в диференциале функции равномерное ее изменение для малой доли всего процесса изменения, имеем произведение приращения аргумента на некоторый коэфициент K; для других долей процесса этот коэфициент K будет уже другим.

---

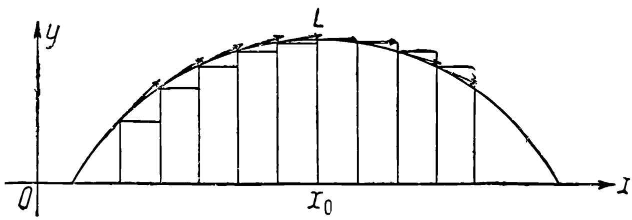
[1] Размеры этой книжки не позволяют войти в более детальное рассмотрение связи между диференциалом и приращением. Принято давать более точное изложение, пользуясь теорией пределов и понятием производной. Для степенной функции отбрасывание малых второго, третьего порядка дает то же, что диференциал; для других функций эта связь сложнее (см Брюстер, Что такое исчисление бесконечно малых; Виттинг, Приближенные вычисления).

Несмотря на такие упрощения, диференциал, однако, вполне верно отражает основной характер изменения функции. В наших задачах на максимум-минимум требуется знать: растет ли функция или убывает, или находится в критическом состоянии перехода от возрастания к убыванию (случай максимума) или от убывания к возрастанию (случай минимума)[1]. Но поскольку диференциал верно передает характер изменения, мы скажем:

Если диференциал функции $dF > 0$ . . . F возрастает
" " " $dF < 0$ . . . F убывает.

Максимум или минимум возможен при условии: $dF = 0$.

Сказанное можно иллюстрировать графиком. На черт. 58 показаны и диференциалы и приращения функции. Дифе-



Черт. 58.

ренциалы — это приращения по вертикали, взятые до встречи со стрелками касательных. До значения аргумента $x < x_0$ диференциалы (и приращения) положительны; но они постепенно становятся меньше. При значении $x > x_0$ они уже отрицательны. Вблизи значения $x = x_0$ (черт. 58), т. е. вблизи точки L мы имеем критическое состояние — переход от положительных значений диференциала к отрицательным. Так как в наших задачах изменение значений диференциала бывает плавным, непрерывным (в иных задачах встречаются и разрывы функций), то в какой-то момент процесса диференциал должен обратиться в нуль. Этот момент (т. е. условие максимума) мы улавливаем, когда пишем уравнение $dF = 0$.

Отсюда следует: надо научиться составлять диферен-

[1] В этой книжке оставляются в стороне все более сложные случаи например мгновенная приостановка возрастания и т. д.

циалы для различных функций F, где F означает рассматриваемую в задаче величину, например, объем вписанного цилиндра и т. п.

3. ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

В любом учебнике по диференциальному исчислению (см. также Брюстер, Что такое исчисление бесконечно малых) читатель найдет ряд правил, позволяющих без труда определять диференциал даже для сложных функций. Здесь же мы вкратце укажем простейшие правила, чтобы можно было показать решение (методом диференциалов) задач на максимум-минимум.

Мы перейдем теперь к нахождению диференциала сперва для простейших, основных функций, например, x^2; $\sin x$; $\cos x$;..., а затем и более сложных. Прежде всего заметим, что диференциал постоянной величины равен нулю, ибо постоянная величина не зависит от x и, следовательно, не получает никакого приращения. Для функции $f=x^2$ мы в последнем примере уже нашли диференциал.

А именно: если $f=x^2$, то $df=2xdx$;
„ $f=ax^2$, „ $df=2axdx$.

Пусть теперь дана функция $f=ax^3$.

Если аргумент получит приращение Δx, то можно составить схему:

	аргумент	функция
Исходное значение	x	ax^3
Новое значение	$x+\Delta x$	$a(x+\Delta x)^3$

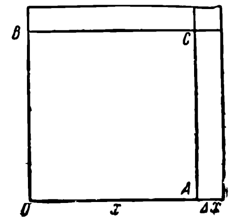
Приращение функции

$$\Delta f=a[x^3+3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]-ax^3=$$
$$=a[3x^2\cdot\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3].$$

Если теперь Δx близится к нулю ($\Delta x\to 0$), то второе и третье слагаемые можно будет отбросить, и останется только $a\cdot 3x^2\cdot\Delta x$. Это и есть диференциал. Мы получили: если $f=ax^3$, то $df=3ax^2dx$.

Можно пояснить полученное правило нахождения диференциала на следующем примере (черт. 59).

Имеется квадрат, сторона котрого равна x. Стороны OA и OB закреплены в точке O. Площадь квадрата $f=x^2$. Пусть теперь стороны начинают увеличиваться. Если длина стороны получила приращение Δx, то по бокам AC и BC начинают образовываться дополнительные полоски, каждая по площади равная $x \cdot \Delta x$. Мы оставляем без внимания образующийся в правом верхнем углу квадратик $(\Delta x)^2$. Если его не считать, то приращение площади, равное $2x \cdot \Delta x$, будет пропорционально приращению Δx. Это и есть диференциал: $df=2xdx$. Такое же построение можно сделать для куба. Мы получим три дополнительных слоя, каждый из которых по объему равен $x^2 \cdot \Delta x$. Поэтому диференциал функции $f=x^3$ будет: $df=3x^2 \cdot dx$.



Черт. 59.

Примечание. Из этих примеров следует, что диференциал совпадает с приращением, у которого сохраняются только величины I порядка малости. Можно составить целую таблицу:

f	ax^2	ax^3	ax^4	...	ax^m
df	$2axdx$	$3ax^2dx$	$4ax^3dx$	...	$max^{m-1}dx$

Правило для нахождения диференциала степенной функции x^m сохраняется и в случае отрицательного показателя. Например, при $m=-2$ функция

$$f=x^{-2}=\frac{1}{x^2};$$

$$df=-2 \cdot x^{-2-1}dx=2x^{-3}dx=-\frac{2}{x^3}dx.$$

При $m=-1$ функция

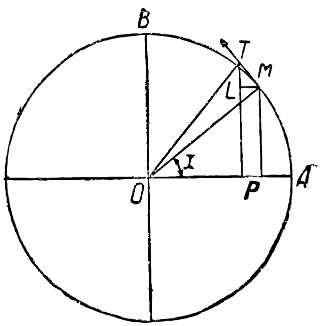
$$f=x^{-1}=\frac{1}{x};$$

откуда

$$df = -1 \cdot x^{-2} dx = -\frac{1}{x^2} dx.$$

Читатель может проверить справедливость этих формул, рассматривая малые приращения.

Рассмотрим еще диференциал синуса (черт. 60). Так как изменение синуса зависит от изменения угла x, или дуги $AM = x$, то надо сосредоточить внимание на перемещении точки M. В каждый данный момент можно считать, что перемещение совершается по касательной MT.



Черт. 60.

Радиус принимаем за 1; тогда $\sin x = MP = y$. Но при прямолинейном перемещении приращение Δy было бы равно:

$$MT \sin TML = MT \cdot \cos x = \\ = \Delta x \cdot \cos x.$$

Поэтому

$$dy = d(\sin x) = \cos x\, dx.$$

Здесь угол x измеряется длиной дуги AM (радиус равен 1). Поэтому приращение дуги равно приращению угла. Это означает: если $x = 1{,}10$ (в радианной мере) получает приращение $\Delta x = 0{,}05$, то приращение синуса $\Delta y \approx dy = \cos 1{,}10 \cdot 0{,}05$.

Аналогично получается формула для диференциала $\cos x$:

$$d(\sin x) = \cos x dx; \quad d(\cos x) = -\sin x dx.$$

Перейдем теперь к более сложным функциям.

Случай А. Пусть

$$F = f_1 + f_2.$$

Тогда

$$\Delta F = \Delta f_1 + \Delta f_2,$$

а потому также

$$dF = df_1 + df_2$$

(здесь берется алгебраическая сумма, т. е. сумма или разность двух функций).

Случай B. Пусть

$$F = f_1 \cdot f_2,$$

т. е. функция F является произведением двух функций. Например,

$$f_1(x) = x^3; \quad f_2(x) = \cos x; \quad F = x^3 \cos x.$$

Если f_1 получит приращение Δf_1 и f_2—приращение Δf_2, то F получит значение:

$$(f_1 + \Delta f_1)\ (f_2 + \Delta f_2) = f_1 f_2 + f_2 \Delta f_1 + f_1 \Delta f_2 + \Delta f_1 \Delta f_2.$$

Откуда приращение

$$\Delta F = f_2 \cdot \Delta f_1 + f_1 \cdot \Delta f_2 + \Delta f_1 \cdot \Delta f_2.$$

Будем считать приращение аргумента Δx чрезвычайно малым. Тогда Δf_1 и Δf_2 также будут чрезвычайно малы[1], а потому их произведение будет величиной II порядка малости. Поэтому диференциал

$$dF = f_2 df_1 + f_1 df_2;$$

или, обозначая $f_1 = u$; $f_2 = v$, получим

$$d(uv) = vdu + udv$$

Случай C. Пусть $F = \frac{u}{v}$; мельчайшее изменение аргумента повлечет за собой мельчайшие изменения Δu и Δv. Тогда новое значение F будет $\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$. Приращение

$$\Delta F = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v\ (v + \Delta v)} =$$

$$= \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v} \approx \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2}.$$

Поэтому диференциал

$$dF = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

---

[1] Здесь предполагается, что рассматриваемые функции непрерывны, плавно изменяющиеся, — только такие функции мы встречали в наших задачах.

Случай D. Пусть теперь F есть более сложная функция, например, $F = \sin^3 x = (\sin x)^3$. Это случай функции от функции; если обозначить $\sin x = z$, то $F = z^3$. Можно составить схему:

$$x \ . \ . \ . \sin x = z \ . \ . \ . \ z^3 = F.$$

Мельчайшее приращение Δx влечет за собой мельчайшее изменение Δz; а это последнее — также мельчайшее изменение ΔF. Мы видели, что для функции $F = z^3$ диференциал $dF = 3z^2\,dz$. Но диференциал dz в свою очередь равен: $dz = d(\sin x) = \cos x dx$.
Поэтому

$$dF = 3z^2\,dz = 3z^2 \cdot \cos x dx = 3\sin^2 x \cos x dx.$$

Аналогично найдем диференциал, например, для функции $F = (1 - x^2)^5$.

Пишем схему:

$$\begin{array}{l} x \ . \ . \ . \ (1 - x^2) \ . \ . \ . \ (1 - x^2)^5 \\ \qquad\qquad\qquad z \ . \ . \ . \ z^5 = F \end{array}$$

Так как $F = z^5$, то диференциал $dF = 5z^4 dz$. В свою очередь диференциал

$$dz = d(1 - x^2) = d(1) - d(x^2) = (0 - 2x)dx = -2xdx.$$

Поэтому

$$dF = 5z^4(-2x)dx = -5(1 - x^2)^4 \cdot 2xdx.$$

Теперь мы имеем все необходимое, или, как говорят, весь необходимый аппарат для решения задач конечно, если в них встречаются только функции вида x^m, $\sin x$ и их комбинации). Каждую задачу мы начинаем так же, как в главе III, т. е. составляется функция F для рассматриваемой в задаче основной величины, которая должна достигнуть максимума или минимума. Для этой функции на основании только что указанных правил составляется диференциал dF. Максимум или минимум достигается при условии, если (суммарное) приращение обращается в нуль. Поэтому получается условие:

$$dF = 0.$$

Входящий в это уравнение множитель $\Delta x = dx$ можно сократить, так как она дает произвольное (малое) приращение аргумента, и по своему смыслу не равен нулю.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ.

Перейдем к решению задач. Для того чтобы наглядно убедиться в преимуществе метода диференциалов, будем решать те же задачи, какие мы решали в главах II и III. Если взять задачу из главы III, то там уже построена функция F, дающая главную величину в задаче. Если же взять задачу из главы II, то эту функцию еще надо построить.

Задача 1 (см. главу I). Между двумя источниками света, силы a и b, расположенными в точках A и B, найти точку M, в которой сила освещения от обоих источников вместе была бы наименьшей.

Черт. 61.

Решение.

Пусть, например, $a = 8\,000$ свечей, $b = 1\,000$ свечей (черт. 61).

Расстояние $AB = l = 30$ *м*. Обозначим AM через x; тогда $MB = l - x$. Согласно закону физики, интенсивность освещения прямо пропорциональна силе источника и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Поэтому интенсивность освещения слева равна

$$\frac{ka}{x^2} = \frac{k \cdot 8\,000}{x^2};$$

справа равна:

$$\frac{kb}{(l-x)^2} = \frac{k \cdot 1\,000}{(l-x)^2};$$

(здесь k — коэфициент пропорциональности).

Интенсивность общего освещения равна:

$$F = \frac{k \cdot 8\,000}{x^2} + \frac{k \cdot 1\,000}{(l-x)^2}.$$

Для решения задачи находим диференциал функции F,

$$dF = d\,(k \cdot 8\,000\,x^{-2}) + d\,[k \cdot 1\,000 \cdot (l-x)^{-2}] =$$

$$= k \cdot 8\,000 \cdot (-2) \cdot x^{-3} dx +$$

$$+ k \cdot 1\,000 \cdot (-2)\,(l-x)^{-3} \cdot (-1)\,dx,$$

или

$$dF = \frac{-2 \cdot 8\,000}{x^3}\,dx + \frac{2 \cdot 1\,000}{(l - x)^3}\,dx.$$

Приравниваем его нулю: $dF = 0$

$$\frac{-2 \cdot 8\,000}{x^3}dx + \frac{2 \cdot 1\,000}{(l - x)^3}\,dx = 0;$$

или, так как $dx \neq 0$, то

$$-\frac{2 \cdot 8\,000}{x^3} + \frac{2 \cdot 1\,000}{(l - x)^3} = 0;$$

$$\frac{8\,000}{x^3} = \frac{1\,000}{(l - x)^3}.$$

Обозначим $l - x = MB$ через y; тогда получим

$$\frac{8\,000}{x^3} = \frac{1\,000}{y^3};$$

или

$$x^3 : y^3 = 8 : 1; \quad x_0 : y_0 = 2 : 1,$$

т. е. расстояние AM должно быть вдвое больше, чем MB.

Задача 2. В конус вписать цилиндр наибольшего объема (см. задачу 2 глава III).

Решение. Для объема вписанного цилиндра мы получили формулу:

$$V = \frac{\pi H}{a}\,x^2(a - x).$$

Отбрасывая постоянный коэфициент, мы приходим к задаче найти максимум функции $F = x^2(a - x)$ или $F = ax^2 - x^3$.

Находим диференциал:

$$dF = (2ax - 3x^2)\,dx.$$

Пишем:

$$dF = 0;\ 2ax - 3x^2 = 0;\ x(2a - 3x) = 0.$$

Решение $x = 0$ не подходит по смыслу задачи. Остается:

$$2a - 3x = 0;\ x = x_0 = \frac{2}{3}a.$$

Задача 3 (см. задачу 3 главы III). В данный шар вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение. Для объема цилиндра было найдено выражение $V=2\pi(R^2-y^2)y$.

Поэтому надо найти максимум для функции

$$F=(R^2-y^2)y=R^2y-y^3$$

(здесь аргумент есть y). Находим диференциал:

$$dF=R^2\cdot 1\cdot dy-3y^2\,dy=(R^2-3y^2)\,dy.$$

Условие для максимума:

$$dF=0;(R^2-3y^2)\,dy=0.$$

Откуда:

$$R^2-3y^2=0; y^2=\frac{R^2}{3};$$

$$y=y_0=\frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4. Электрическая лампочка висит над центром круглой площадки радиуса a. На какой высоте надо повесить лампочку, чтобы освещение на краях площадки было максимальным?

Решение. Мы получили функцию

$$F=\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=x(x^2+a^2)^{-3/2}.$$

Ищем диференциал по формуле:

$$d(uv)=vdu+udv,$$

$$\text{здесь } u=x;\ v=(x^2+a^2)^{-3/2},$$

$$dF=1\cdot dx\cdot(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}+x\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+a^2\right)^{-5/2}\cdot 2xdx.$$

Условие для максимума: $dF=0$.

Или

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3x^2}{(x^2+a^2)^{5/2}},\quad 1=\frac{3x^2}{x^2+a^2};$$

$$x^2+a^2=3x^2;\ x=x_0=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Задача 5. Из листа жести шириною a требуется согнуть открытый жолоб так, чтобы поперечный разрез его имел форму трапеции, у которой стороны $AB = BC = CD = \frac{a}{3}$ и при том так, чтобы вместимость жолоба была наибольшей.

Решение. Надо отыскать максимум функции:

$$F = (1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Находим диференциал dF опять по формуле:

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Здесь

$$u = (1 + \cos\varphi);\ v = \sin\varphi.$$

Тогда

$$du = -\sin\varphi\, d\varphi;\ dv = \cos\varphi\, d\varphi.$$

$$dF = \sin\varphi(-\sin\varphi\, d\varphi) + (1 + \cos\varphi)\cos\varphi\, d\varphi;\ dF = 0;$$

$$-\sin^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi = 0;$$

или

$$-1 + \cos^2\varphi + \cos\varphi + \cos^2\varphi = 0;\ 2\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0.$$

Мы получили условие для максимума в виде тригонометрического уравнения. Обозначив $\cos\varphi$ через z, получим:

$$2z^2 + z - 1 = 0;\ z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4};$$

по условию задачи решение $z = -1$ не подходит, поэтому $z = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$; $\cos\varphi = \frac{1}{2}$; $\varphi + 60°$.

Задача 6 (см. задачу 6 главы II). Из квадратного листа жести желательно приготовить открытую коробку следующим образом: по углам вырезать равные квадраты, а затем согнуть выступающие края. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы получилась коробка наибольшей вместимости?

Решение. Площадь основания коробки $(a - 2x)^2$. Объем ее: $V = (a - 2x)^2 x = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$. Поэтому надо искать максимум функции:

$$F = a^2x - 4ax^2 + 4x^3.$$

Находим диференциал:

$$dF=(a^2-8ax+12x^2)\,dx.$$

Условием для максимума будет: $dF=0$ или a^2-8ax+ $+12x^2=0$;

$$x=\frac{+4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}.$$

Или

$$x=\frac{4a\pm 2a}{12};$$

решение $x_1=\frac{a}{2}$ не подходит по смыслу задачи; остается $x=x_0=\frac{a}{6}$.

Задача 7. Требуется приготовить цилиндрическую кружку, открытую сверху, заданного объема V_1 так, чтобы при этом ушло минимум материала (т. е. чтобы поверхность была минимальной).

Объем кружки заранее задан: $\pi x^2 y=V_1$.

Поверхность равна $2\pi xy+\pi x^2=S$.

Из формулы объема следует, что

$$y=\frac{V_1}{\pi x^2}.$$

Поэтому поверхность

$$S=2\pi x\cdot\frac{V_1}{\pi x^2}+\pi x^2=\frac{2V_1}{x}+\pi x^2.$$

Эта функция должна достигнуть минимума. Диференциал

$$dF=\left(-2V_1\cdot\frac{1}{x^2}+2\pi x\right)dx.$$

Условие для минимума:

$$\frac{2V_1}{x^2}=2\pi x;\quad \frac{V_1}{\pi}=x^3;\quad x=x_0=\sqrt[3]{\frac{V_1}{\pi}}.$$

Задача 8. Найти минимум функции $F = x + \frac{a^2}{x}$ (черт. 62).

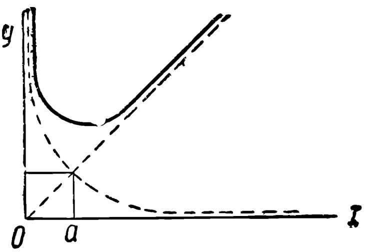
Находим диференциал:

$$dF = d(x) + d(a^2x^{-1}) = 1dx + (-1)a^2x^{-2}dx =$$

$$= dx - \frac{a^2}{x^2}dx = \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)dx.$$

Условие минимума:

$$\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)dx = 0; 1 - \frac{a^2}{x^2} = 0; x^2 = a^2; x = \pm a.$$



Черт. 62.

Ограничиваясь положительными значениями $x = x_0 = a$ видим, что **минимум функции равен** $2a$.

Задача 9. (см. задачу 6 главы I; задачу 15 главы II; задачу 7 главы III). На стене висит плакат AB. Глаз наблюдателя находится в точке M; CM—горизонтальная линия. Где поместиться наблюдателю, чтобы видеть плакат под наибольшим углом (черт. 49)?

Решение. Как мы видели в главе III (задача 7) задача приводится к отыскиванию максимума дроби $F = \frac{x}{x^2 + ab}$. Находим диференциал этой дроби, согласно правилу C (см. стр. 97):

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

В данном случае:

$$dF = \frac{(x^2 + ab) \cdot dx - x \cdot d(x^2 + ab)}{(x^2 + ab)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + ab)dx - x2x \cdot dx}{(x^2 + ab)^2},$$

[диференциал постоянного $d\,(ab)$ равен нулю]. Условие для максимума: $dF = 0$; откуда получим:

$$ab - x^2 = 0;\ x = x_0 = \sqrt{ab}.$$

Хотя решение задач теперь механизировано, однако, надеюсь, читатель не будет в претензии за то, что его заставили в главе II поработать над приращениями. Эта проработка дала ему возможность понять, что скрывается за этим совершенным аппаратом диференциалов, какой материал он перерабатывает, и поможет лучше ознакомиться с ценнейшим инструментом высшей математики — диференциальным исчислением.

В заключение приведем отрывок из сочинения Ферма, гениального французского математика XVII в., который еще до открытия диференциального исчисления дал способ решения задач на максимум-минимум, весьма близкий к методу диференциалов[1]. Заметим кстати, что Лейбниц открыл метод диференциалов и интегралов в 1675 г. (опубликован в 1684 г.). Ньютон дал свой метод флюксий (весьма близкий к диференциальному исчислению) в 1671 г. Нижеприводимый „метод исследования наибольших и наименьших значений“ открыт Ферма в 1629 г. и впервые был изложен в письме к Робервалю и Декарту от 1638 г. (Сочинения Ферма изданы в Париже в подлиннике на латинском и в переводе на французском языках). Мы приведем этот отрывок почти дословно (с некоторыми изменениями в обозначениях для того, чтобы облегчить понимание читателю) и покажем, как связать его с изложением этой книжки.

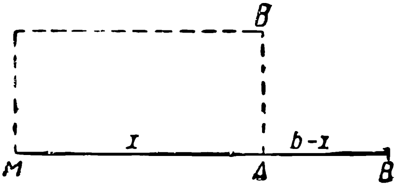
ОТРЫВОК ИЗ СОЧИНЕНИЙ ФЕРМА

„Все учение о нахождении наибольших и наименьших значений основывается на том, что принимают два неизвестных F и x и применяют следующее единственное правило.

Допустим, что F представляет собой какую-либо исследуемую величину (либо поверхность, либо тело,

[1] Цитируем по книжке **Вилейтнер**, Хрестоматия по истории математики, IV вып., ГТТИ.

либо длину), которая должна принять наибольшее или наименьшее значение, и выразим ее через члены, содержащие x в тех или иных степенях. Затем возьмем для аргумента значение $x+h$, и снова выразим F через члены, содержащие x и h в тех или иных степенях. Затем обе совокупности, полученные для F, положим по примеру Диофанта приближенно равными друг другу. Отбросим на обеих сторонах одинаковые члены; тогда в каждом члене справа и слева будет стоять либо h, либо какая-нибудь его степень. Затем разделим все члены на h (или на степень h) так, чтобы (по крайней мере) один из членов на какой-либо стороне был совершенно свободен от множителя h. Затем на обеих сторонах зачеркнем члены, содержащие h или его степени, а то, что останется, положим равными друг другу, или же, если на одной из сторон ничего не останется, приравняем отрицательные члены положительным. Решение последнего уравнения даст искомое значение x; а тогда максимум или минимум получится согласно выражению F. Приведем следующий пример,



Черт. 63.

Задача. Отрезок MB требуется разделить так в точке A, чтобы прямоугольник MAB был наибольшим (черт. 63).

Решение. Обозначим весь отрезок MB через b; часть его MA через x, тогда остаток будет равен $b-x$. Прямоугольник на этих отрезках будет равен:

$$x(b-x)=bx-x^2,$$

и это выражение должно получить наибольшее значение. Положим теперь, с другой стороны, первую часть отрезка равной $x+h$, так что другая будет равна $b-x-h$, и прямоугольник на отрезках будет равен:

$$(x+h)(b-x-h)=bx-x^2+bh-2xh-h^2,$$

и это должно быть приближенно равным прямоугольнику $bx - x^2$, т. е.

$$bx - x^2 + bh - 2xh - h^2 \approx bx - x^2.$$

Отбросив одинаковые члены, получим:

$$bh - 2xh - h^2 \approx 0; \; bh \approx 2xh + h^2.$$

Если все это поделить на h, то получим:

$$b \approx 2x + h.$$

Отбрасывая h, получим:

$$b = 2x.$$

Таким образом решением задачи является деление отрезка b пополам. И не может существовать более общего метода... Этот метод никогда не изменяет. Напротив того, он может быть распространен на многочисленные прекрасные проблемы".

Читатель, внимательно прочитавший книжку, сумеет оценить исключительную ценность этого отрывка. В нем Ферма уловил центральный, узловой момент всей проблемы нахождения максимума-минимума. Когда он предлагает значения $F(x)$ и $F(x+h)$ принять „приближенно равными между собой", то это означает, что изменение функции как бы приостанавливается для значений аргумента, близких к x_0 (дающему максимум-минимум). Далее, когда Ферма отбрасывает члены, содержащие h^2, h^3 и т. д. и оставляет члены, содержащие h только в первой степени, он фактически оставляет именно диференциал функции F. Отметим еще, что он предлагает или „положительные члены приравнять отрицательным", т. е. приравнять „положительные приращения отрицательным", как мы это делали в главе II, или же перенести все члены уравнения в одну часть и приравнять нулю, т. е. приравнять нулю суммарные приращения — диференциалы, как мы поступали в настоящей главе. В отрывке Ферма дается алгебраическая часть метода, он мало говорит о функциональной зависимости, вовсе не говорит о том, что приращение h весьма мало. В ту эпоху основные понятия высшей математики только зарождались. Но потребности того времени, — а именно ряд конкретных задач из механики, гидростатики, физики — толкали ученых к разработке новых методов, помимо оставленных в наследство греческой наукой, и в лице гениального Ферма мы видим одного из прямых предвозвестников математики нового времени — анализа бесконечно малых.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Р. БОНЧКОВСКИЙ
Технич. редактор З. ЛИВШИЦ

*

Сдано в произв. 3/VII 1935 г. Подпис. к печ. 28/I 1936 г.
Уполн. Главлита № В-32307 Тираж 20000
Формат бум. 82×110/32 Изд. № 10
В 1 б. л. 137.600 печ. зн., 6,3 уч.-авт. л. Бумажных листов 1 11/16
Отпечатано во 2-й тип. ОНТИ
имени Евг. Соколовой
Ленинград, пр. Кр.
Командиров, 29
Зак. № 795.

1 руб.

НП — 6-4